BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Mercredi 19 juin 2024

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$.
On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Affirmation 1 :
L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe C_f.

Affirmation 2 :
La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 5\mathrm{e}^{-x}$.

2. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n), telles que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

De plus, la suite (u_n) converge vers -1 et la suite (w_n) converge vers 1.

Affirmation 3 :
La suite (v_n) converge vers un nombre réel l appartenant à l'intervalle $[-1; 1]$.

On suppose de plus que la suite (u_n) est croissante et que la suite (w_n) est décroissante.
Affirmation 4 :
Pour tout entier naturel n, on a alors : $u_0 \leq v_n \leq w_0$.

Exercice 2 (5 points)

Une agence de marketing a étudié la satisfaction des clients concernant le service clientèle à l'occasion de l'achat d'un téléviseur. Ces achats ont été réalisés soit sur internet, soit dans une chaîne de magasins d'électroménager, soit dans une enseigne de grandes surfaces.

Les achats sur internet représentent 60 % des ventes, les achats en magasin d'électroménager 30 % des ventes et ceux en grandes surfaces 10 % des ventes.

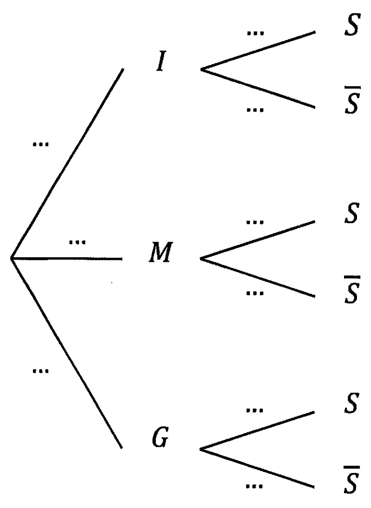
Une enquête montre que la proportion des clients satisfaits du service clientèle est de :

- 75 % pour les clients sur internet ;
- 90 % pour les clients en magasin d'électroménager ;
- 80 % pour les clients en grande surface.

On choisit au hasard un client ayant acheté le modèle de téléviseur concerné.

On définit les événements suivants :
- I : « le client a effectué son achat sur internet » ;
- M : « le client a effectué son achat en magasin d'électroménager » ;
- G : « le client a effectué son achat en grande surface » ;
- S : « le client est satisfait du service clientèle ».

Si A est un événement quelconque, on notera $\bar{A}$ son événement contraire et $P(A)$ sa probabilité.



1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.

2. Calculer la probabilité que le client ait réalisé son achat sur internet et soit satisfait du service clientèle.

3. Démontrer que $P(S) = 0{,}8$.

4. Un client est satisfait du service clientèle. Quelle est la probabilité qu'il ait effectué son achat sur internet ? On donnera un résultat arrondi à 10^{-3} près.

5. Pour réaliser l'étude, l'agence doit contacter chaque jour 30 clients parmi les acheteurs du téléviseur. On suppose que le nombre de clients est suffisamment important pour assimiler le choix des 30 clients à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 30 clients, associe le nombre de clients satisfaits du service clientèle.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Déterminer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée.

6. En résolvant une inéquation, déterminer la taille minimale de l'échantillon de clients à contacter pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure à 0,99.

7. Dans les deux questions **a.** et **b.** qui suivent, on ne s'intéresse qu'aux seuls achats sur internet.
   Lorsqu'une commande de téléviseur est passée par un client, on considère que le temps de livraison du téléviseur est modélisé par une variable aléatoire T égale à la somme de deux variables aléatoires T_1 et T_2.

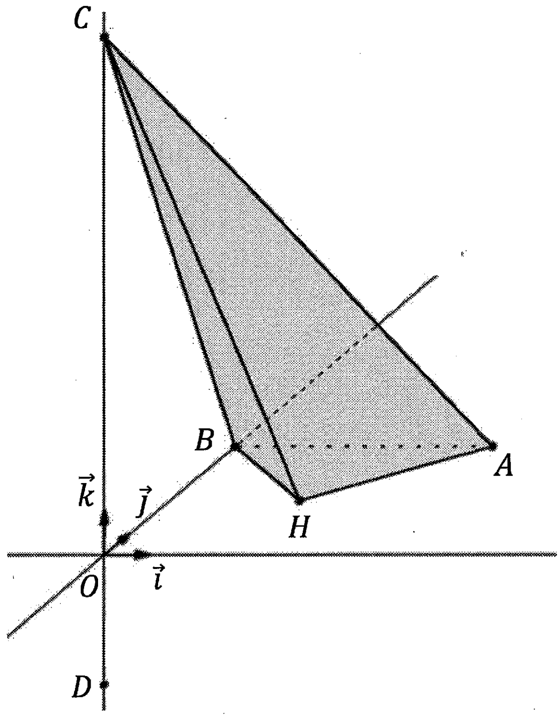
   La variable aléatoire T_1 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis un entrepôt de stockage vers une plateforme de distribution. La variable aléatoire T_2 modélise le nombre entier de jours pour l'acheminement du téléviseur depuis cette plateforme jusqu'au domicile du client.

   On admet que les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes, et on donne :
   - L'espérance $E(T_1) = 4$ et la variance $V(T_1) = 2$;
   - L'espérance $E(T_2) = 3$ et la variance $V(T_2) = 1$.

   a. Déterminer l'espérance $E(T)$ et la variance $V(T)$ de la variable aléatoire T.

   b. Un client passe une commande de téléviseur sur internet. Justifier que la probabilité qu'il reçoive son téléviseur entre 5 et 9 jours après sa commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

Exercice 3 (5 points)



L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k})$.

On considère les points $A\,(5\,;\,5\,;\,0)$, $B\,(0\,;\,5\,;\,0)$, $C\,(0\,;\,0\,;\,10)$ et $D\left(0\,;\,0\,;\,-\frac{5}{2}\right)$.

1.

a. Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

a. On admet que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$.

b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3.

a. Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

4.

a. Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.

b. En déduire le volume du tétraèdre $ABCH$.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Exercice 4 (6 points)

Partie A : étude de la fonction f.

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1.

- **a.** Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- **b.** Montrer que pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.
- **c.** Étudier le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
- **d.** Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

2.

- **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1\,;2]$.
- **b.** Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0\,;\,+\infty[$.
- **c.** Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g.

La fonction g est définie sur $]0\,;1]$ par $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0\,;1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

2.

- **a.** Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.
- **b.** On admet le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		$+$	0	$-$	

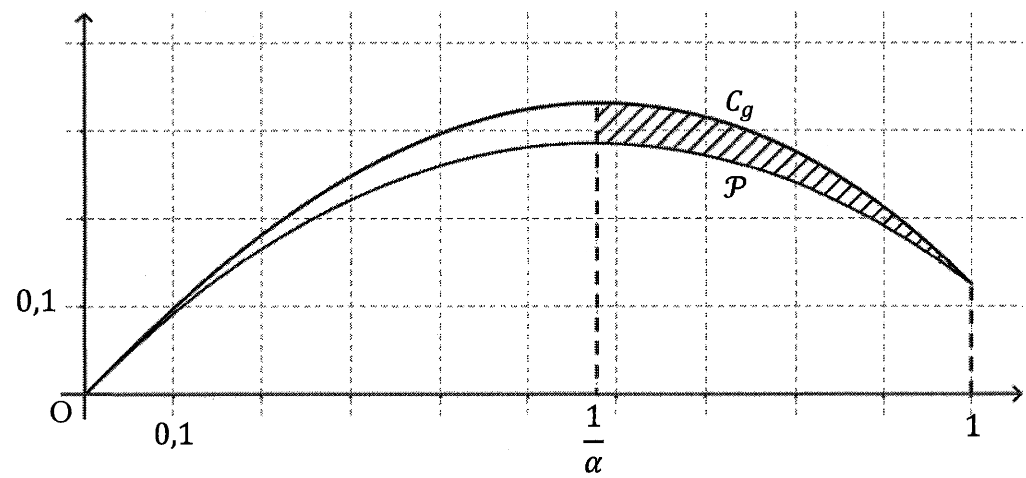
En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0\,;1]$.
Les images et les limites ne sont pas demandées.

Tourner la page.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe C_g de la fonction g ;
- La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes C_g et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.
On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

1.

a. Justifier la position relative des courbes C_g et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0\,;1]$.

b. Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln x \ dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}.$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathcal{A}$.