BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Mardi 21 mars 2023

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire « type collège » est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple.
Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse inexacte.

Un jeu vidéo possède une vaste communauté de joueurs en ligne. Avant de débuter une partie, le joueur doit choisir entre deux « mondes » : soit le monde A, soit le monde B.

On choisit au hasard un individu dans la communauté des joueurs.
Lorsqu'il joue une partie, on admet que :

- la probabilité que le joueur choisisse le monde A est égale à $\frac{2}{5}$;
- si le joueur choisit le monde A, la probabilité qu'il gagne la partie est de $\frac{7}{10}$;
- la probabilité que le joueur gagne la partie est de $\frac{12}{25}$.

On considère les évènements suivants :

- A : « Le joueur choisit le monde A » ;
- B : « Le joueur choisit le monde B » ;
- G : « Le joueur gagne la partie ».

1. La probabilité que le joueur choisisse le monde A et gagne la partie est égale à :

a. $\frac{7}{10}$ **b.** $\frac{3}{25}$ **c.** $\frac{7}{25}$ **d.** $\frac{24}{125}$

2. La probabilité $P_B(G)$ de l'événement G sachant que B est réalisé est égale à :

a. $\frac{1}{5}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{7}{15}$ **d.** $\frac{5}{12}$

Dans la suite de l'exercice, un joueur effectue 10 parties successives. On assimile cette situation à un tirage aléatoire avec remise. On rappelle que la probabilité de gagner une partie est de $\frac{12}{25}$.

3. La probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne exactement 6 parties est égale à:

a. $0{,}859$ **b.** $0{,}671$ **c.** $0{,}188$ **d.** $0{,}187$

4. On considère un entier naturel n pour lequel la probabilité, arrondie au millième, que le joueur gagne au plus n parties est de $0{,}207$. Alors :

a. $n = 2$ **b.** $n = 3$ **c.** $n = 4$ **d.** $n = 5$

5. La probabilité que le joueur gagne au moins une partie est égale à :

a. $1 - \left(\frac{12}{25}\right)^{10}$ **b.** $\left(\frac{13}{25}\right)^{10}$ **c.** $\left(\frac{12}{25}\right)^{10}$ **d.** $1 - \left(\frac{13}{25}\right)^{10}$

Exercice 2 (5 points)

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique.
Au début de l'étude la population est de $100\,000$ insectes.
Pour préserver l'équilibre du milieu naturel le nombre d'insectes ne doit pas dépasser $400\,000$.

Partie A : Étude d'un premier modèle en laboratoire
L'observation de l'évolution de ces populations d'insectes en laboratoire, en l'absence de tout prédateur, montre que le nombre d'insectes augmente de $60\ \%$ chaque mois.
En tenant compte de cette observation, les biologistes modélisent l'évolution de la population d'insectes à l'aide d'une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n modélise le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois. On a donc $u_0 = 0{,}1$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n = 0{,}1 \times 1{,}6^n$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. En résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n > 0{,}4$.

4. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel serait-il préservé ? Justifier la réponse.

Partie B : Étude d'un second modèle
En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes choisissent une nouvelle modélisation.
Ils modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (v_n), définie par : $v_0 = 0{,}1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1{,}6v_n - 1{,}6v_n^2$, où, pour tout entier naturel n, v_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1{,}6x - 1{,}6x^2$.

a. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

3. **a.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

b. Montrer que la suite (v_n) est convergente.

On note ℓ la valeur de sa limite. On admet que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

c. Déterminer la valeur de ℓ. Selon ce modèle, l'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ? Justifier la réponse.

4. On donne ci-contre la fonction `seuil`, écrite en langage Python.

a. Qu'observe-t-on si on saisit `seuil(0.4) ?`

b. Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de `seuil(0.35)`.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(a) :
    v=0.1
    n=0
    while v<a :
      v=1.6*v-1.6*v*v
      n=n+1
    return n
```

Exercice 3 (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère :

- le plan $\mathcal{P}_1$ dont une équation cartésienne est $2x+y-z+2=0$,
- le plan $\mathcal{P}_2$ passant par le point $B(1\,;1\,;2)$ et dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{n_1}$ normal au plan $\mathcal{P}_1$.

b. On rappelle que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur normal à l'un des plans est orthogonal à un vecteur normal à l'autre plan.
Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires.

2. a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}_2$.

b. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=0\\y=-2+t\\z=t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Montrer que la droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

On considère le point $A(1\,;1\,;1)$ et on admet que le point A n'appartient ni à $\mathcal{P}_1$ ni à $\mathcal{P}_2$.
On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite Δ.

3. On rappelle que, d'après la question **2.b**, la droite Δ est l'ensemble des points M_t de coordonnées $(0\,;-2+t\,;t)$, où t désigne un nombre réel quelconque.

a. Montrer que, pour tout réel t, $AM_t=\sqrt{2t^2-8t+11}$.

b. En déduire que $AH=\sqrt{3}$.

4. On note $\mathcal{D}_1$ la droite orthogonale au plan $\mathcal{P}_1$ passant par le point A et H_1 le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}_1$.

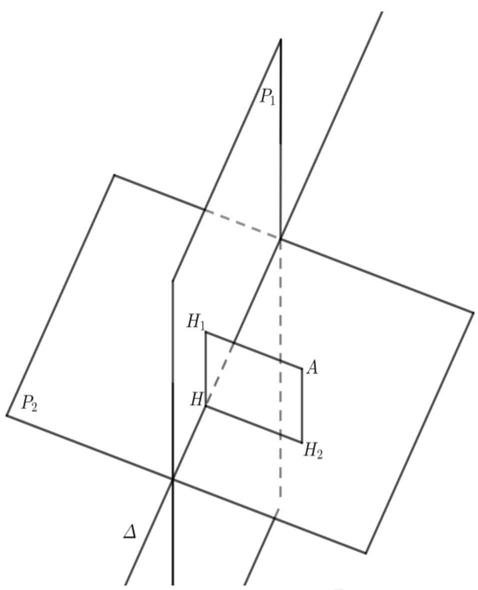
a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_1$.
b. En déduire que le point H_1 a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\,;\frac{5}{3}\right)$.

5. Soit H_2 le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}_2$.

On admet que H_2 a pour coordonnées $\left(\frac{4}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{4}{3}\right)$
et que H a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,2)$.

Sur le schéma ci-contre, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont représentés, ainsi que les points A, H_1, H_2, H.

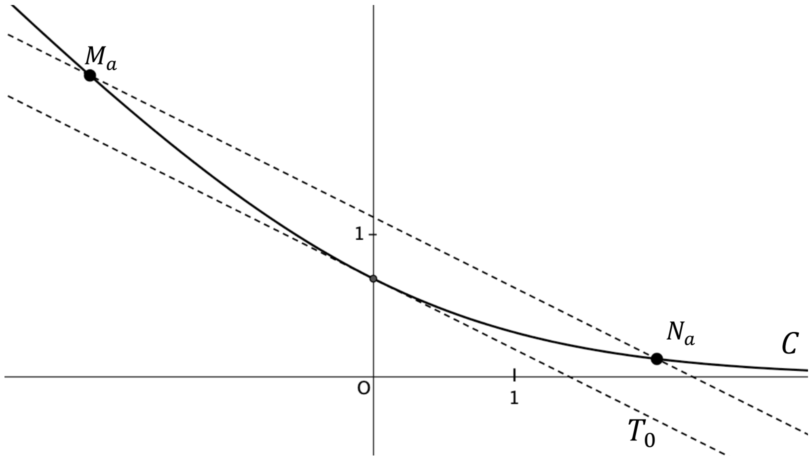
Montrer que AH_1HH_2 est un rectangle.



Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe C est tracée ci-dessous.



1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

c. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$.

d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. On note T_0 la tangente à la courbe C en son point d'abscisse 0.

a. Déterminer une équation de la tangente T_0.

b. Montrer que la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln(2)$.

3. Pour tout nombre réel a différent de 0, on note M_a et N_a les points de la courbe C d'abscisses respectives $-a$ et a. On a donc : $M_a(-a\,; f(-a))$ et $N_a(a\,; f(a))$.

a. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f(x) - f(-x) = -x$.

b. En déduire que les droites T_0 et (M_aN_a) sont parallèles.