

Devoir (1h50)
(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (4 points)

Déterminer, **en justifiant**, les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

1°) u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

2°) u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{n + n\sqrt{n}}$

3°) u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{7^n - 3^n}{7^n + 5^n}$

Exercice 2 (6 points)

Déterminer, **en justifiant**, les limites des fonctions suivantes, **on précisera les éventuelles asymptotes trouvées** :

1°) $f(x) = \sqrt{4 + e^x}$ en $-\infty$.

2°) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 4}$ en -2 .

3°) $f(x) = \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2}{x+1}$ en $-\infty$.

4°) $f(x) = \frac{2 - \sin(x)}{x + \cos(x)}$ en $+\infty$.

Exercice 3 (10 points)

On considère la suite u définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n , par : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2 en détaillant les calculs.
En déduire que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique
2. a. Démontrer **par récurrence** que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 2n$.
b. En déduire la limite de la suite u .

3. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^p$.
a. **Recopier** la fonction et **compléter** les deux instructions manquantes.
b. Quelle est la valeur renvoyée par l'exécution de l'instruction : `seuil(2)` ? **Justifier**.

```
def seuil(p) :
    u = 12
    n = 0
    while . . . :
        u = . . .
        n = n + 1
    return n
```

4. On considère la suite v définie pour tout entier naturel n , par : $v_n = u_n - 2n$.
a. Démontrer que la suite v est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0 .
b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{12}{2^n} + 2n$.
d. Retrouver la limite de la suite u . **Justifier**.
c. Montrer que la suite u est croissante à partir de $n_0 = 2$.