NOM et Prénom : ………………………………………………………………………………………

Jeudi 25 septembre 2025 Term Spé Maths 6

<u>Devoir (1h50)</u>

(Calculatrice autorisée)

<u>Exercice 1</u> *(4,5 points)*

1°) Soit u une suite arithmétique telle que $u_4 = 15$ et $u_{10} = 12$.
Déterminer, en justifiant, le premier terme u_0 et la raison r de la suite u.

2°) Calculer, en utilisant une formule du cours, la somme suivante :
$S = 5 + 15 + 25 + 35 + \ldots + 195 + 205$.

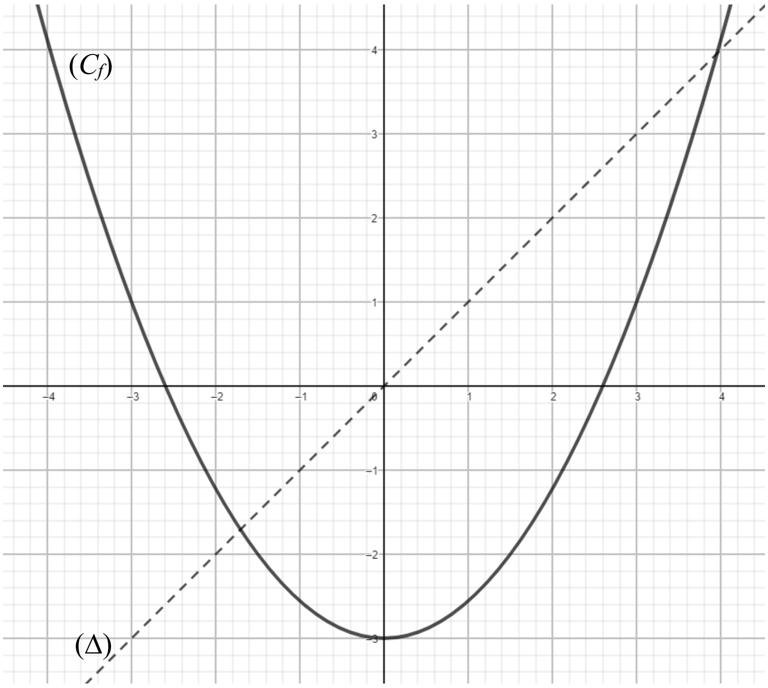
3°) Soit v une suite géométrique telle que $v_5 = 54$ et $v_7 = 486$.
Déterminer, en justifiant, le premier terme v_0 et la raison q de la suite v.

4°) Calculer, en utilisant une formule du cours, la somme suivante :
$S = 4 + 12 + 36 + 108 + \ldots + 4 \times 3^{12}$.

<u>Exercice 2</u> *(3 points)*

Soit u la suite définie par :
$u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$

La courbe (C_f) est tracée ici,
ainsi que la droite (Δ) : $y = x$.



1°) Expliquer en détail la méthode permettant d'obtenir les points A_1, A_2 et A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses à partir du point $A_0(u_0 ; 0)$ et des courbes (C_f) et (Δ).

2°) Réaliser cette construction sur le graphique ci-contre.
(**Laisser les traits de construction**)

3°) La fonction f a pour équation : $f(x) = \frac{4}{9}x^2 - 3$.
En déduire les valeurs exactes de u_1 et u_2.

<u>Exercice 3</u> *(4 points)*

Déterminer, en justifiant, les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

1°) u définie sur $\mathbf{N}$ par : $u_n = \left(1 - 2\sqrt{n}\right)\left(n^2 - 4\right)$

2°) u définie sur $\mathbf{N}$ par : $u_n = \dfrac{1 - e^{-n}}{1 + e^{n}}$

3°) u définie sur $\mathbf{N}$ par : $u_n = \dfrac{n^3 - 2n^2 - 3}{1 + 2n + 3n^3}$

4°) u définie sur $\mathbf{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{n + n\sqrt{n}}$

…/…

<u>Exercice 4</u> *(8,5 points)*

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 15% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de revenir travailler dans les locaux de l'entreprise, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le *n*-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel *n*, $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 450$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel *n* par : $v_n = a_n - 3000$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

b. Exprimer v_n en fonction de *n* pour tout entier naturel *n*.

c. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $a_n = -2800 \times 0{,}85^n + 3000$.

4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :
Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de *n* mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction *f* définie sur [0 ; +∞[par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

c. On admet que la limite de la suite *u* vérifie l'équation : $f(x) = x$.
En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.