BACCALAURÉAT GÉNÉRAL BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Mercredi 10 décembre 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1 à 7.
Seule la feuille annexe (page 7) sera à dégrafer et à rendre avec votre copie.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (6 points)

Partie A

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de 0,97.
La probabilité qu'un danger se présente est de 0,01 et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,01465.

On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'évènement « un danger se présente ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui pourra être complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. a) Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.
   b) En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active.
   Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est 0,005.
4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.
   Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à 0,01.

Partie B

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme.
On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $p(S) = 0{,}00525$.
On considère la variable aléatoire X qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.

Les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

1. Justifier la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
4. Calculer $p(X < 2)$.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul.
On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.

Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à 0,07.

<u>Exercice 2</u> (4 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16\ ; \qquad v_0 = 5\ ;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.

2. Compléter la fonction termes, écrite en Python sur la feuille annexe, de sorte qu'elle calcule les termes des suites (u_n) et (v_n).

3. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

   a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.

   b) Déterminer la limite de cette suite (w_n).

   c) Compléter la fonction seuil, écrite en Python sur la feuille annexe, pour qu'elle renvoie la plus petite valeur de l'entier n telle que $w_n < 10^{-p}$.

4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{2}{5} w_n$.

   b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante.
On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geq v_0$ c'est-à-dire $v_n \geq 5$.

   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 5$.

   d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

<u>Exercice 3</u> (6 points)

On considère la fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-\infty;-1]$ telle que $f(x) = 3e^{2x} - 2x - 3$ et on note $\mathscr{C}f$ sa courbe représentative.

<u>Partie A</u>

1. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2. Déterminer une expression de $f'(x)$ puis montrer que sur $]-\infty;-1]$, $f'(x) \leq 6e^{-2} - 2$.
3. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser le tableau de variations de cette fonction sur $]-\infty;-1]$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-\infty;-1]$, puis donner un encadrement de α à 0,1 près.
5. En déduire le signe de la fonction f sur $]-\infty;-1]$.

<u>Partie B</u>

1. Déterminer une expression de $f''(x)$.
2. Montrer que la tangente T à $\mathscr{C}f$ au point d'abscisse α a pour équation $y = (4\alpha + 4)(x - \alpha)$.
3. Quelle est la position relative de $\mathscr{C}f$ et de T ?

<u>Partie C</u>

On considère la fonction g définie et dérivable sur $]-\infty;-1]$ par $g(x) = e^{3x} - (2x+1)e^{x}$.

1. Démontrer que sur $]-\infty;-1]$, on a $g'(x) = e^{x}f(x)$ où f est la fonction définie dans la partie A.
2. En déduire les variations de g sur $]-\infty;-1]$.

<u>Exercice 4</u> (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquer **<u>sur la feuille annexe</u> la lettre de la réponse choisie**.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x + k^2 & si\ \ x < 2 \\ 2x + 2k + 1 & si\ 2 \leq x < 5 \\ 17 & si\ x \geq 5 \end{cases}$.

   A. f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $k = 3$.
   B. f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $k = -1$.
   C. f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $k = -1$ et $k = 3$.
   D. Il n'existe pas de valeur de k pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$.
   L'expression de la fonction $u\ o\ v$, définie sur $\mathbb{R}$ est telle que :

   A. $(u\ o\ v\ )(x) = 2e^{2x} + 1$
   B. $(u\ o\ v\ )(x) = e^{2x^2+1}$
   C. $(u\ o\ v\ )(x) = (2x^2 + 1)e^x$
   D. $(u\ o\ v\ )(x) = 2e^{x^2} + 1$

3. Soit S la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$.

   A. $S_n = \frac{n(3+3^n)}{2}$
   B. $S_n = \frac{3(3^n - 1)}{2}$
   C. $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$
   D. $S_n = \frac{3^n - 3}{2}$

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{x^2}$ et f' sa fonction dérivée.

   A. $f'(x) = 2xe^{x^2}$
   B. $f'(x) = 4x^2e^{x^2}$
   C. $f'(x) = (2x + x^2)e^{x^2}$
   D. $f'(x) = 2x(1 + x^2)e^{x^2}$

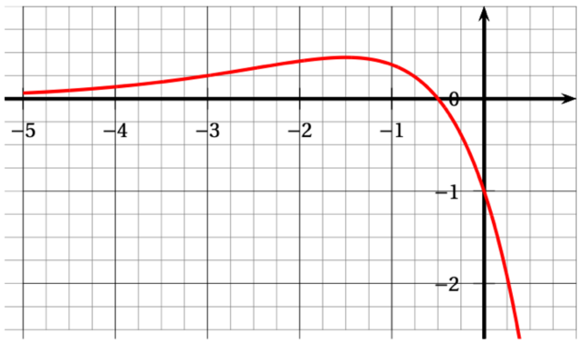
5. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).
   On sait que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3$.
   On peut alors affirmer que :

   A. La suite (v_n) converge
   B. Si la suite (u_n) est croissante alors la suite (v_n) est minorée par u_0
   C. $1 \leq v_0 \leq 3$
   D. La suite (v_n) diverge

Pour les questions 6 à 8 ci-dessous, on considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

La courbe de sa fonction dérivée f' est donnée ci-contre.

On admet que f' admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ et que sa courbe coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.



6.

A. La fonction f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$

B. La fonction f admet un maximum en $-\frac{1}{2}$

C. La fonction f admet un minimum en $-\frac{1}{2}$

D. Au point d'abscisse -1, la courbe de la fonction f admet une tangente horizontale

7.

A. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[$

B. La fonction f est convexe sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

C. La courbe représentant la fonction f n'admet pas de point d'inflexion

D. La fonction f est concave sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

8. La dérivée seconde f'' de la fonction f vérifie :

A. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[$

B. $f''(x) \geq 0$ pour $x \in [-2; -1]$

C. $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$

D. $f''(-3) = 0$

Nom : Groupe :

Prénom :

ANNEXE A COMPLETER ET A RENDRE AVEC VOTRE COPIE

Exercice 2

Question 2 :

```
def termes (n) :
        u = 16
        v = 5
        for i in range (1 , n+1) :
                c = u
                u = (3*u+2*v) / 5
                v = ……………………..
        return (u , v)
```

Question 3 c :

```
def seuil (p) :
        n = 0
        w = 11
        while …………………..…………. :
                n = n+1
                w = ………………………….
        return (n)
```

Exercice 4

Question	Réponse
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	