Vendredi 14 février 2025 Term Spé Maths 6

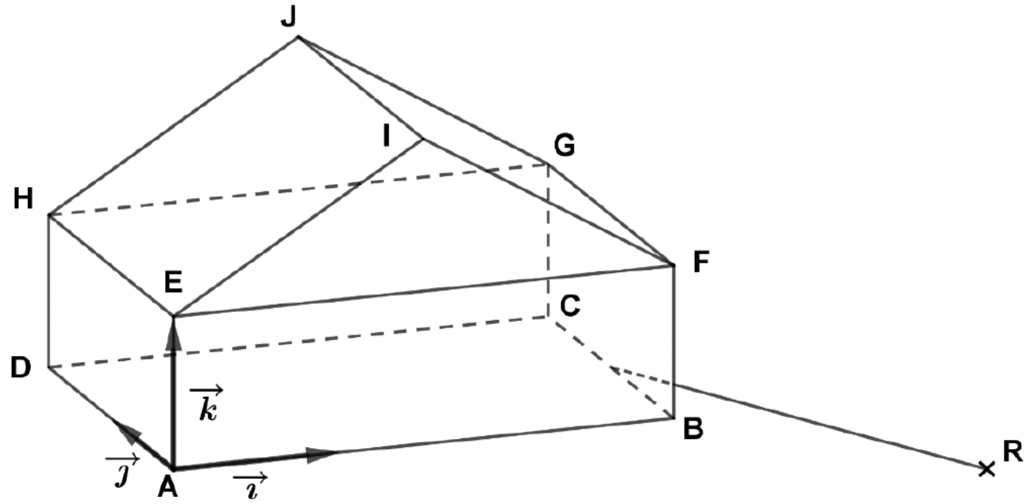
Devoir (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(10 points)*

Une maison est constituée d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH surmonté d'un prisme EFIHGJ dont une base est le triangle EIF isocèle en I.

Cette maison est représentée ci-dessous.



On a $AB=3$, $AD=2$, $AE=1$.

On définit les vecteurs $\vec{\imath}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\vec{k}=\overrightarrow{AE}$.

On munit ainsi l'espace du repère orthonormé $(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1. Donner les coordonnées du point G.
2. Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2\,;0\,;-3)$ est vecteur normal au plan (EHI).
   Déterminer une équation cartésienne du plan (EHI).
3. Déterminer les coordonnées du point I.
4. Déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{EIF}$.
5. Afin de raccorder la maison au réseau électrique, on souhaite creuser une tranchée rectiligne depuis un relais électrique situé en contrebas de la maison.

   Le relais est représenté par le point R de coordonnées $(6\,;-3\,;-1)$.

   La tranchée est assimilée à un segment d'une droite Δ passant par R et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-3\,;4\,;1)$. On souhaite vérifier que la tranchée atteindra la maison au niveau de l'arête [BC].

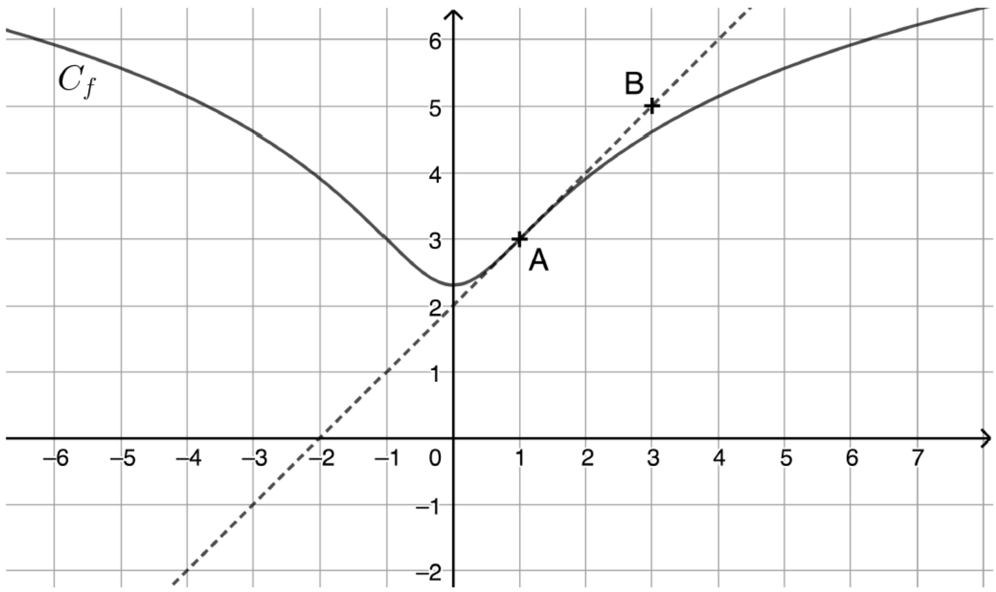
   a. Donner une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. On admet qu'une équation du plan (BFG) est $x=3$.
   Soit K le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (BFG).
   Déterminer les coordonnées du point K .

   c. Le point K appartient-il bien à l'arête [BC] ?

Exercice 2 *(10 points)*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. On considère les points A$(1\ ;\ 3)$ et B$(3\ ;\ 5)$.
On donne ci-dessous C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe C_f au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2+1\right)+b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2)$.

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe C_f.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.