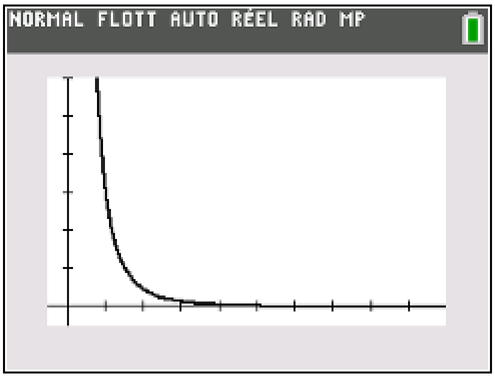
Vendredi 17 janvier 2025 — Term Spé Maths 6

Devoir (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(6 points)*

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{3 + \ln(x)}{x^3}$



1°) Le tracé de la courbe (C_f) représentative de f sur une calculatrice graphique donne le résultat ci-contre :

Emettre une conjecture sur le tableau de variation complet de f sur $]0; +\infty[$.

2°) Déterminer la limite de f en 0.

3°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4°) Déterminer une expression de la fonction dérivée f' de f.
En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

5°) Dresser le tableau de variations complet de f, on précisera la valeur exacte et la valeur arrondie à l'entier le plus proche du maximum M, et on indiquera les asymptotes éventuelles à la courbe (C_f).
Que penser de la conjecture émise dans le 1°) ?

6°) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de la courbe (C_f).

Exercice 2 *(5 points)*

Soient u et v les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 16^n$ et $v_n = n^{16}$

1°) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel p tel que : $u_p > 10^{15}$

2°) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel q tel que : $v_q > 10^{15}$

3°) Soit w la suite définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $w_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $w_n = n\left(4\ln(2) - 16\,\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$

b) En déduire la limite de w_n quand n tend vers $+\infty$.

c) En déduire la limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$ en quand n tend vers $+\infty$.

.../...

<u>Exercice 3</u> *(9 points)*

Soient les points A(0 ; 1 ; 2), B(1 ; 2 ; 4), C(–1 ; 2 ; 1), D(2 ; 5 ; 7), E(2 ; 3 ; 3) et F(2 ; 3,5 ; 4) dans un repère de l'espace.

Partie A

1°) Démontrer que les points D, E, F sont alignés.

2°) Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

3°) Démontrer que les points A, B, C et E ne sont pas coplanaires.

Partie B

Soient les droites :

$$(d_1) : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = -9 + 4t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad (d_2) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

1°) Démontrer que le point A n'appartient ni à (d_1), ni à (d_2).

2°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (AB).

3°) Déterminer le point d'intersection des droites (d_1) et (d_2).

4°) Démontrer que les droites (d_1) et (AB) ne sont pas coplanaires.