BACCALAURÉAT GÉNÉRAL BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2025

MATHÉMATIQUES

Mercredi 26 mars 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

<u>Exercice 1</u> (4 points)

Un sondage réalisé en France fournit les informations suivantes :

- 60% des plus de 15 ans ont l'intention de regarder les Jeux Olympiques et Paralympiques (JOP) de Paris 2024 à la télévision ;
- parmi ceux qui ont l'intention de regarder les JOP, 8 personnes sur 9 déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

On choisit au hasard une personne de plus de 15 ans. On considère les évènements suivants :

- J : « la personne a l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision » ;
- S : « la personne choisie déclare pratiquer une activité sportive régulière ».

On note $\overline{\mathrm{J}}$ et $\overline{\mathrm{S}}$ leurs évènements contraires.

Dans les questions 1) et 2), les probabilités seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

1) Déterminer la probabilité que la personne choisie ait l'intention de regarder les JOP Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.

Selon ce sondage, deux personnes sur trois parmi les plus de 15 ans déclarent pratiquer une activité sportive régulière.

2) a. Calculer la probabilité que la personne choisie n'ait pas l'intention de regarder les JOP de Paris 2024 à la télévision et déclare pratiquer une activité sportive régulière.

   b. En déduire la probabilité de S sachant $\overline{\mathrm{J}}$, notée $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{J}}}(\mathrm{S})$.

Dans la suite de l'exercice, les résultats des probabilités seront arrondis au millième.

3) Dans le cadre d'une opération de promotion, 30 personnes de plus de 15 ans sont choisies au hasard. On assimile ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

   a. Donner, en justifiant, la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.

   b. Calculer la probabilité qu'exactement 16 personnes déclarent pratiquer une activité sportive régulière parmi les 30 personnes.

   c. La fédération française de judo souhaite offrir une place pour la finale de l'épreuve par équipe mixte de judo à l'Arena Champ-de-Mars pour chaque personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière parmi ces 30 personnes.
   Le prix d'une place s'élève à 380 € et on dispose d'un budget de 10 000 € pour cette opération.
   Quelle est la probabilité que ce budget soit suffisant ?

4) On choisit finalement au hasard n personnes de plus de 15 ans.
   Déterminer, en détaillant les calculs, la plus petite valeur de n telle que la probabilité d'avoir au moins une personne déclarant pratiquer une activité sportive régulière soit supérieure à 0,99.

<u>Exercice 2</u> (6 points)

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - x\ln(x)$.

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

<u>Partie A</u> : Etude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif , $f''(x) = \frac{2x-1}{x}$.
4. Etudier les variations de la fonction f' sur $]0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f' sur $]0;+\infty[$.
   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0;+\infty[$.
   Les limites de la fonction f' aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

<u>Partie B</u> : Etude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$.

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. a) Justifier que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$ sur $]0;+\infty[$.

   b) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur $]0;+\infty[$.

<u>Partie C</u> : Etude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = {u_n}^2 - u_n\ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
2. Justifier que la suite (u_n) converge.
3. En déduire la limite ℓ de la suite (u_n).

<u>Exercice 3</u> (4,5 points)

PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\, e^{-\frac{1}{4}x}$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. On considère l'équation différentielle
$$(E') : \quad y' + \frac{1}{4}y = 0$$
d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,; +\infty[$.

   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}$.

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0; +\infty[$. De plus, on admet que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. a. Justifier que, pour tout réel x positif, $f'(x) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}$.

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

   a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14; 15]$.

   b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` ci-contre, écrite en langage python.

a	14				
b	15				
$b-a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	$FAUX$				

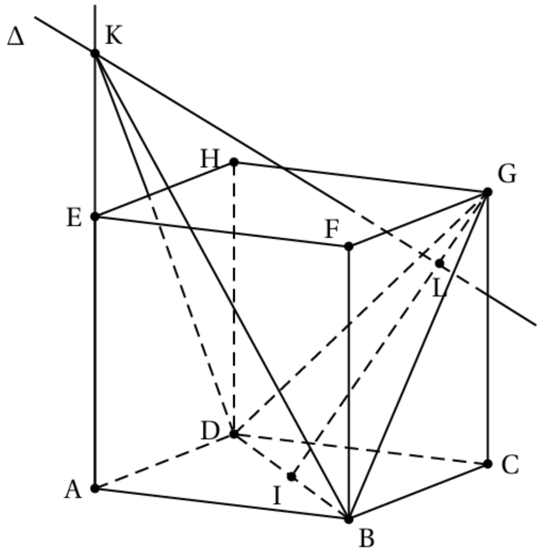
```python
from math import exp

def f(x):
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation():
    a,b=14,15
    while b-a>0.1:
        m=(a+b)/2
        if f(m)>8:
            a=m
        else:
            b=m
    return a,b
```

   c. Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` dans le contexte de la question ?

Exercice 4 (5,5 points)



On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.

Le point I est le milieu du segment [BD].

On définit le point L tel que $\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{IG}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. a. Donner les coordonnées des points D, B et G.

   b. Calculer les coordonnées du point I.

   c. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}\ ;\ \frac{7}{8}\ ;\ \frac{3}{4}\right)$.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

   b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\ ;0\ ;\ \frac{13}{8}\right)$.

   c. Que représente le point L pour le point K ? Justifier la réponse.

4. a. Calculer la distance KL.

   b. On admet que le triangle DBG est équilatéral. Montrer que son aire est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\ ;0\ ;\ a)$.

   a. Montrer que le volume V_a de la pyramide ABCDK_a est égal à $\frac{a}{3}$.

   b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = & t' \\ y = & t' \\ z = & -t' + a \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

   On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).
   Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\frac{a+1}{3}\ ;\frac{a+1}{3}\ ;\ \frac{2a-1}{3}\right)$.

   c. Montrer que $K_aL_a = \frac{a+1}{\sqrt{3}}$.

   d. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.