Mardi 14 novembre 2023 — Term Spé Maths 3

Devoir de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(10 points)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{x^2+1}$.

1°) Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \leq x \leq 5, -4 \leq y \leq 4$.
Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur la copie.

2°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3°) On se propose maintenant d'étudier plus précisément la fonction f.

a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.
En déduire que le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - x$.

b) Soit $Q(x) = 4x^3 + 3x - 1$.
Déterminer les limites de $Q(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$, puis étudier les variations de Q sur $\mathbf{R}$.

c) En déduire que l'équation $Q(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbf{R}$.

d) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

e) En déduire le signe de $Q(x)$, puis celui de $f'(x)$, en fonction de x sur $\mathbf{R}$.

f) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbf{R}$.

4°) On veut représenter sur l'écran de la calculatrice les nouvelles informations trouvées dans le 3°) à propos de la fonction f, quels intervalles choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?
On donnera un intervalle d'amplitude 0,5 en abscisse et d'amplitude 0,02 en ordonnée.

Exercice 2 *(10 points)*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{11}{u_n}\right)$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

Partie A - Étude de la suite (u_n)

1. Donner u_1 et u_2 sous forme de fractions irréductibles.
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{11}{x}\right)$$
Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\sqrt{11}\ ;\ +\infty\right[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \sqrt{11}$.
4. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite réelle. On note a cette limite.
5. Après avoir déterminé et résolu une équation dont a est solution, préciser la valeur exacte de a.

.../...

Partie B - Application géométrique

Pour tout entier naturel n, on considère un rectangle R_n d'aire 11 dont la largeur est notée ℓ_n et longueur L_n

La suite (L_n) est définie par $L_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n,

$$L_{n+1} = \frac{L_n + \ell_n}{2}$$

1. **a.** Expliquer pourquoi $\ell_0 = 2,2$.

   b. Établir que pour tout entier naturel n,

$$\ell_n = \frac{11}{L_n}.$$

2. Vérifier que la suite (L_n) correspond à la suite (u_n) de la **partie A**.

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\ell_n \leqslant \sqrt{11} \leqslant L_n$.

4. On admet que les suites (L_n) et (ℓ_n) convergent toutes les deux vers $\sqrt{11}$. Interpréter géométriquement ce résultat dans le contexte de la **partie B**.

5. Voici un script, écrit en langage Python, relatif aux suites étudiées dans cette partie :

```
def heron(n):
  L=5
  ℓ=2.2
  for i in range(n):
    L = (L+ℓ) / 2
    ℓ = 11 / L
  return round(ℓ,6), round(L,6)
```

On rappelle que la fonction Python `round(x,k)` renvoie une version arrondie du nombre `x` avec `k` décimales.

a. Si l'utilisateur tape `heron(3)` dans une console d'exécution Python, qu'obtient-il comme valeurs de sortie pour ℓ et L ?

b. Donner une interprétation de ces deux valeurs.