BACCALAURÉAT GÉNÉRAL BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Lundi 25 mars 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

<u>Exercice 1</u> (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des vélos électriques sont mis à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc des vélos, contrôle leur état chaque lundi.

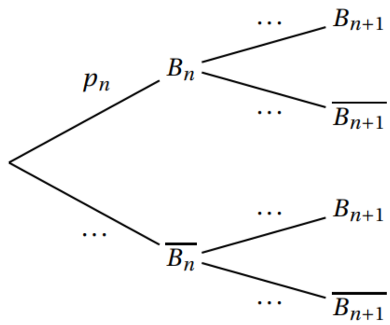
<u>Partie A</u>

On estime que :

- lorsqu'un vélo est en bon état un lundi, la probabilité qu'il soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 ;
- lorsqu'un vélo est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'il soit en bon état le lundi suivant est 0,4.

On s'intéresse à l'état d'un vélo lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « le vélo est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, le vélo est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.



2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4$.

3. a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0{,}8$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.
   b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction n.
   c. En déduire la limite de la suite (p_n).

<u>Partie B</u>

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'un vélo est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'un vélo soit en bon état est égale à 0,8.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 vélos, associe le nombre de vélos en bon état.
Le nombre de vélos du parc étant très important, le prélèvement de 15 vélos peut être assimilé à un tirage avec remise.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité que les 15 vélos soient en bon état.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 10 vélos soient en bon état dans un lot de 15.

4. Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.

<u>Exercice 2</u> (5,5 points)

<u>Partie A</u>

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x - \ln(1 + x)$.

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1; +\infty[$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée $f'(x)$.

3. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1; +\infty[$.

4. a. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1; +\infty[$, on a $f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right)$.

   b. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

<u>Partie B</u>

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1 + u_n)$.
On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.

2. En utilisant la question 3 de la partie A, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq 0$.

3. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.

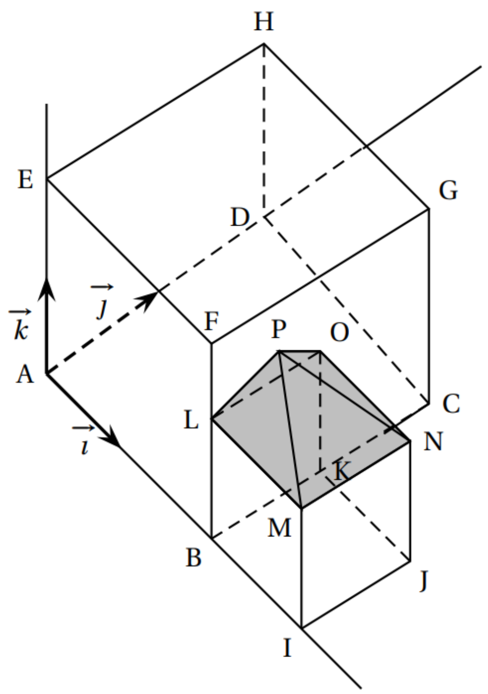
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

<u>Exercice 3</u> (5,5 points)

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.

Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée à un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et K est le milieu du segment [BC].

Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k}\ \right)$ avec $\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. a. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).

2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
   Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2\,;\ \frac{2}{3}\,;\ \frac{4}{3}\right)$.

3. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$.
   b. Calculer la distance PM.
   On admet que la distance PN est égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.
   c. Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.
   Le toit pourra-t-il être construit ?

4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.
   Quel est leur point d'intersection ?

<u>Exercice 4</u> (4 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ln(x^2 + 4)$.

   Affirmation : La fonction f est convexe sur $]-2 ; 2[$.

2. On considère une fonction h définie et continue sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variations de h	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   On note H la primitive de h définie sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

   Affirmation : H est positive sur $]-\infty ; 1]$.

3. On considère la fonction mystere écrite en langage Python :

```
def mystere(n) :
    L = [ ]
    for i in range (n) :
        L.append( i**2 + 1 )
    return L
```

   Affirmation : L'appel mystere(5) renvoie la liste [1, 2, 5, 10, 17].

4. On considère l'équation différentielle $y' = ay + f(x)$ avec f fonction affine définie sur $\mathbb{R}$.
   Les solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation sont les fonctions de la forme :

$$y(x) = ke^{-3x} + \frac{5}{3}x - \frac{5}{9},\ k \in \mathbb{R}.$$

   Affirmation : $f(x) = 5x$.