BACCALAURÉAT GÉNÉRAL BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2023

MATHÉMATIQUES

Lundi 11 décembre 2023

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (6 points)

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

- 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;
- 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;
- les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

- 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;
- 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

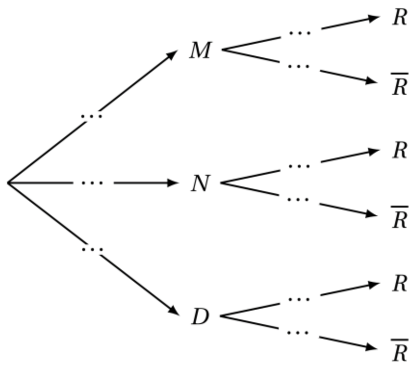
Les parties A et B sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Partie A

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

- M : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;
- N : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;
- D : « Le déchet prélevé est dangereux » ;
- R : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement R.



1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation de l'énoncé. Ne pas justifier.
2) Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,0105.
3) Déterminer la probabilité $p(M \cap \overline{R})$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.
4) Démontrer que la probabilité de l'évènement R est $p(R) = 0{,}6514$.
5) On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième*.

Partie B

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,6514.

1) Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.
   On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.
   a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
   b) Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables.
   On donnera la valeur arrondie au dix-millième.

2) Dans cette question, on prélève désormais n déchets, où n désigne un entier naturel strictement positif.
   a) Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.
   b) Déterminer, en détaillant, la valeur de l'entier naturel n à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,999.

<u>Exercice 2</u> (5,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3$.

1) a. Démontrer que $u_1 = 12$.

   b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.

   c. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

2) a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq n + 1$.

   b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n - 1$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0.

   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times 5^n + n + 1$.

   d. Retrouver la limite de la suite (u_n). Justifier.

   e. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

4) On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.

   a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

   b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ? Justifier.

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

<u>Exercice 3</u> (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

On note $\mathscr{C}f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1) a. Préciser la limite de la fonction en $+\infty$.

   b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}f$.

2) Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3) Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4) Soit m un nombre réel.
   Indiquer sans justifier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ en fonction des valeurs du nombre réel m.

5) On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}f$ est parallèle à la droite Δ.

   a. Montrer que a est solution de l'équation $e^x(x-1) + x^2 = 0$.

   b. On note g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = e^x(x-1) + x^2$.
      On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.
      Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$.

   c. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de g sur$]0;+\infty[$.

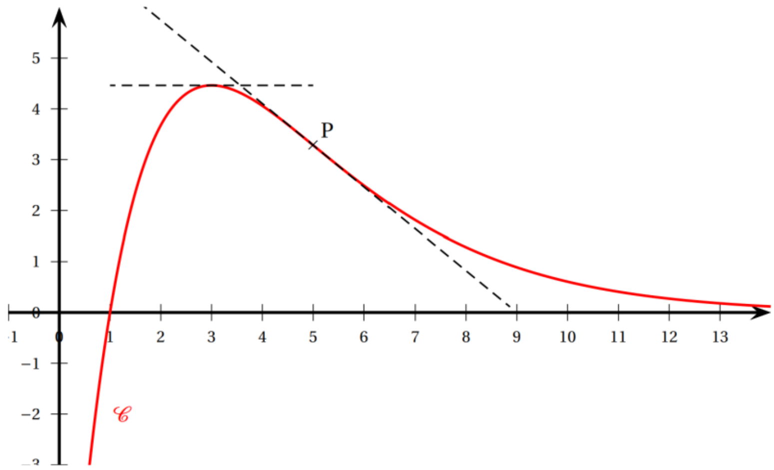
   d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;+\infty[$.

   e. En déduire s'il existe un point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 4 **(3 points)**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquer **sur la copie** le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1) La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.
On sait que : - le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 ;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



On a :

A. pour tout $x \in]0;5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe.

B. pour tout $x \in]0;5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

C. pour tout $x \in]5;+\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe.

D. pour tout $x \in]5;+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

2) Une suite (u_n) est minorée par 3 et converge vers un réel ℓ.
On peut affirmer que :

A. $\ell = 3$

B. $\ell \geq 3$

C. la suite (u_n) est décroissante.

D. la suite (u_n) est constante à partir d'un certain rang.

3) Pour participer à un jeu, un joueur doit payer 4 €. Il lance ensuite un dé équilibré à 6 faces :

- s'il obtient 1, il remporte 12 € ;
- s'il obtient un nombre pair, il remporte 3 € ;
- sinon, il ne remporte rien.

En moyenne, le joueur,

A. gagne 3,5 €.

B. perd 3 €.

C. perd 1,5 €.

D. perd 0,5 €.

4) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^{2n+1}$.
La suite (u_n) est :

A. arithmétique de raison 2.

B. géométrique de raison e.

C. géométrique de raison e^2.

D. convergente vers e.

5) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} ax - \sqrt{b} & si\ \ x < -1 \\ x^2 - 3 & si - 1 \leq x < 2 \\ x - 2 + e^a & si\ x \geq 2 \end{cases}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ lorsque :

A. $b = a$

B. $b = 4$

C. $b = \sqrt{2}$

D. b prend une autre valeur que celles citées précédemment.

6) Soit u une fonction définie et dérivable telle que $u + 4 > 0$.
Parmi les quatre affirmations suivantes, déterminer celle qui n'est pas toujours vraie.

A. e^u a les mêmes variations que u.

B. u^3 a les mêmes variations que u.

C. u^2 a les mêmes variations que u.

D. $\sqrt{u+4}$ a les mêmes variations que u.