BACCALAURÉAT GÉNÉRAL BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2022

MATHÉMATIQUES

Mercredi 14 décembre 2022

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.
Seule la feuille annexe sera à rendre avec votre copie.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5 points)

Une entreprise fabrique des composants pour l'industrie aéronautique. Ces composants sont conçus sur trois chaînes de montage numérotées de 1 à 3.

- La moitié des composants est conçue sur la chaîne n°1 ;
- 30 % des composants sont conçus sur la chaîne n°2 ;
- Les composants restant sont conçus sur la chaîne n°3.

A l'issue du processus de fabrication, il apparaît que 1 % des pièces issues de la chaîne n°1 présentent un défaut, de même que 0,5 % des pièces issues de la chaîne n°2 et 4 % des pièces issues de la chaîne n°3.

On prélève au hasard l'un de ces composants. On note :

- C_1 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°1 » ;
- C_2 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°2 » ;
- C_3 l'évènement « le composant provient de la chaîne n°3 » ;
- D l'évènement « le composant est défectueux ».

Dans tout l'exercice, les calculs de probabilités seront donnés en valeur décimale exacte ou arrondie à 10^{-4} *si nécessaire.*

Partie A

1) Représenter cette situation par un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité que le composant prélevé provienne de la chaîne n°3 et soit défectueux.
3) Montrer que la probabilité de l'évènement D est $p(D) = 0{,}0145$.
4) Calculer la probabilité qu'un composant défectueux provienne de la chaîne n°3.

Partie B

L'entreprise décide de conditionner les composants produits en constituant des lots de n unités.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de n unités, associe le nombre de composants défectueux de ce lot.
Compte tenu des modes de production et de conditionnement de l'entreprise, on peut considérer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0{,}0145$.

1) Dans cette question, les lots possèdent 20 unités. On pose $n = 20$.
   a) Calculer la probabilité qu'un lot possède exactement trois composants défectueux.
   b) Calculer la probabilité qu'un lot possède au moins un composant défectueux.
2) Le directeur de l'entreprise souhaite que la probabilité de n'avoir aucun composant défectueux dans un lot de n composants soit supérieure à 0,85.
   Quelle est la plus grande valeur possible pour n ? Justifier.

Partie C

Les coûts de fabrication des composants de cette entreprise sont de 15 € s'ils proviennent de la chaîne de montage n°1, 12 € s'ils proviennent de la chaîne de montage n°2 et 9 € s'ils proviennent de la chaîne de montage n°3.
Calculer le coût moyen de fabrication d'un composant pour cette entreprise.

Exercice 2 (6 points)

Partie A

Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$.

1) Déterminer les limites de la fonction p en $-\infty$ et en $+\infty$.
2) Déterminer les variations de la fonction p sur $\mathbb{R}$.
3) Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
4) Déterminer une valeur approchée du réel α au centième près.
5) Donner le tableau de signes de la fonction p sur $\mathbb{R}$.

Partie B

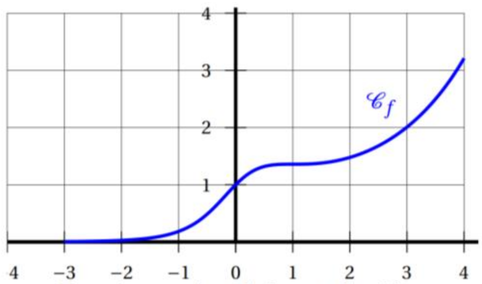
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$.

On note $\mathscr{C}f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

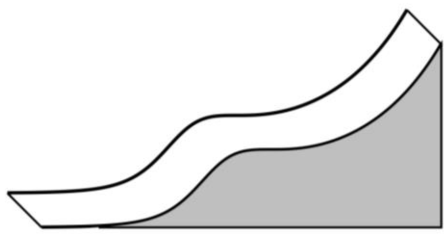
1) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis interpréter graphiquement.
2) Déterminer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3) Justifier que la courbe $\mathscr{C}f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

Partie C

Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathscr{C}f$ sur l'intervalle $[-3; 4]$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

1) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.
2) On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression
   $f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$ pour tout réel de l'intervalle $[-3; 4]$ avec p fonction définie dans la partie A.
   En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Exercice 3 **(5 points)**

Soit k un nombre réel.
On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = k\, u_n(1 - u_n).$$

Les **deux parties** de cet exercice sont **indépendantes**.
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k.

Partie A

Dans cette partie, $k = 1{,}9$ et $u_0 = 0{,}1$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1{,}9\, u_n(1 - u_n)$.

1) On considère la fonction f définie sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1{,}9x(1 - x)$.
Etudier les variations de f sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

2) a) *Cette question est à traiter sur la feuille fournie en annexe.*
A partir de la courbe C_f représentant la fonction f, et de la droite D d'équation $y = x$, construire sur l'axe des abscisses du graphique les trois termes suivants (u_1, u_2 et u_3) de la suite (u_n).
Ne pas justifier mais laisser les traits de construction.
b) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.

3) a) En utilisant le résultat de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.
b) En déduire que la suite (u_n) converge.
c) Déterminer sa limite.

Partie B

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.
On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.
On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1) Etudier la limite de la suite (u_n).

2) *On considère la fonction Python sur la feuille fournie en annexe*.
Compléter cet algorithme permettant de calculer le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-p}$ avec p un entier naturel non nul.

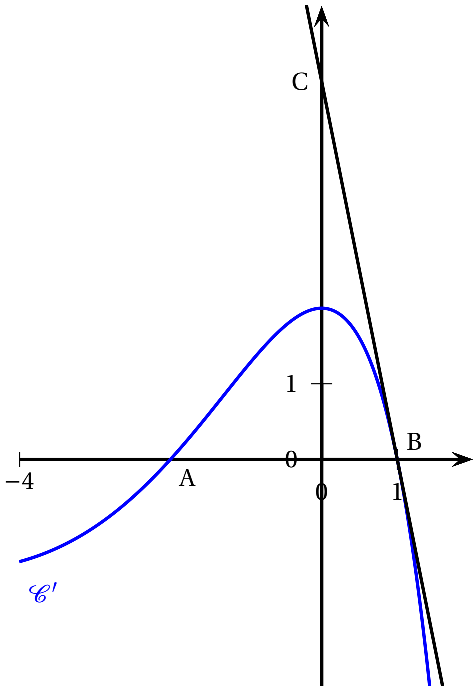
3) En utilisant la calculatrice, indiquer sans justifier la valeur renvoyée par l'instruction algo(6).

Exercice 4 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Questions 1 et 2

Pour les questions 1. et 2, on considère une fonction f deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4 ; 2]$.
On note f' la fonction dérivée de f et f'' la dérivée seconde de f.
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction dérivée f' dans un repère du plan. On donne de plus les points A$(-2 ; 0)$, B$(1 ; 0)$ et C$(0 ; 5)$.



1. La fonction f est :

a. concave sur $[-2 ; 1]$; **b.** convexe sur $[-4 ; 0]$;
c. convexe sur $[-2 ; 1]$; **d.** convexe sur $[0 ; 2]$.

2. On admet que la droite (BC) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}'$ au point B. On a :

a. $f'(1) < 0$; **b.** $f'(1) = 5$;
c. $f''(1) > 0$; **d.** $f''(1) = -5$.

Questions 3 et 4

Un sac contient 20 jetons jaunes et 30 jetons bleus. On tire successivement et avec remise 20 jetons du sac.

3. La probabilité de tirer de 5 à 10 jetons jaunes, arrondie au millième, est :

a. 0,704 **b.** 0,747 **c.** 0,817 **d.** 0,822

4. On note le nombre de jetons jaunes obtenus après ces vingt tirages.
Si on répète cette expérience aléatoire un très grand nombre de fois alors, en moyenne, le nombre de jetons jaunes est égal à :

a. 1,6 **b.** 4,8 **c.** 8 **d.** 10

Question 5

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ est :

a. $y = ex + e$ **b.** $y = 2ex - e$ **c.** $y = 2ex + e$ **d.** $y = ex$

Question 6

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^{2022} + x$.

On peut affirmer que :

a. la fonction g est concave sur $\mathbb{R}$.

b. la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.

c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion.

d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

Question 7

Un récipient contenant initialement 1 litre d'eau est laissé au soleil.
Toutes les heures, le volume d'eau diminue de 15 %.
Au bout de quel nombre entier d'heures le volume d'eau devient-il inférieur à un quart de litre ?

a. 2 heures **b.** 8 heures . **c.** 9 heures **d.** 13 heures

Question 8

Soit k un nombre réel. On cherche les éventuelles valeurs de k pour lesq uelles la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 + e^{x-1} & si\ x \leq 1 \\ 3k(2x-k) & si\ x > 1 \end{cases}$$

a. La fonction f n'est jamais continue sur $\mathbb{R}$ quelque soit k.

b. Il existe une seule valeur de k pour laquelle la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Il existe deux valeurs de k pour laquelle la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

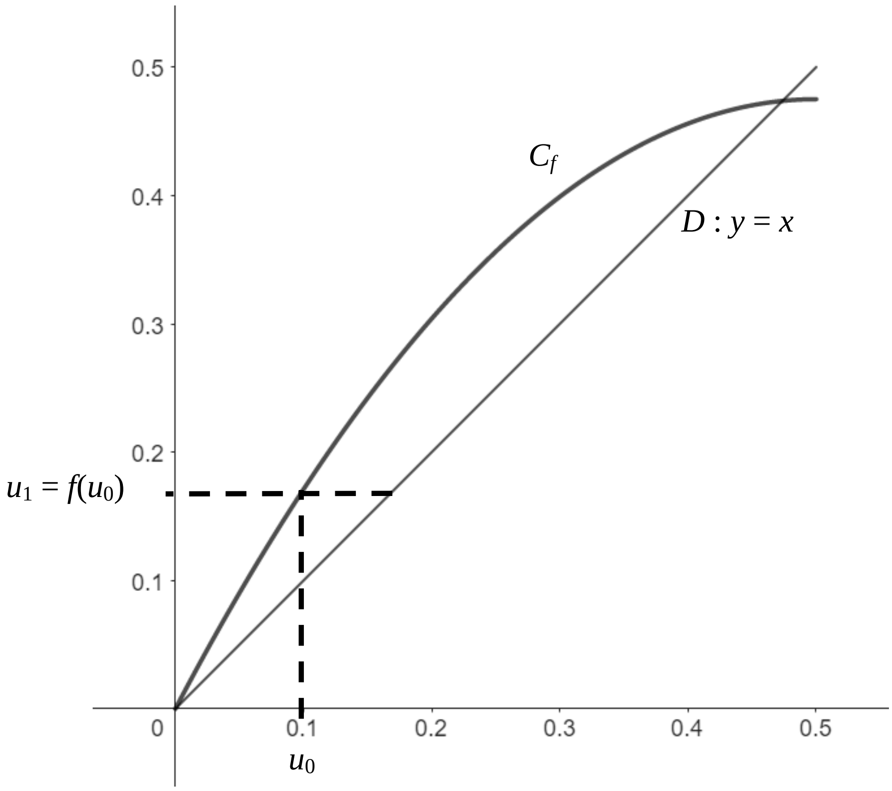
d. La fonction f est toujours continue sur $\mathbb{R}$ quelque soit k.

Prénom & NOM : ……………………………………………………   Classe : ……

Annexe – Exercice 3

(à compléter et à rendre avec la copie)

Partie A – question 2 a :



Partie B – question 2 :

```
def algo(p) :
    u = 1/4
    n = 0
    while ……………………………………………… :
        u = ………………………………………………
        n = n + 1
    return n
```