BACCALAURÉAT GÉNÉRAL BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Décembre 2021

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1. (5 points)

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :

- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie A

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement. On notera :

D l'événement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
A l'événement « le candidat a été admis à l'école » ;
$\overline{D}$ et $\overline{A}$ les événements contraires des événements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,24.

4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie B

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à 0,24.
On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

b. Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

c. Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.
On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à 0,24 et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

a. Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'au moins un candidat issu de ce lycée soit admis à l'école.

b. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il détermine à partir de combien de candidats cette probabilité dépasse 0,99.

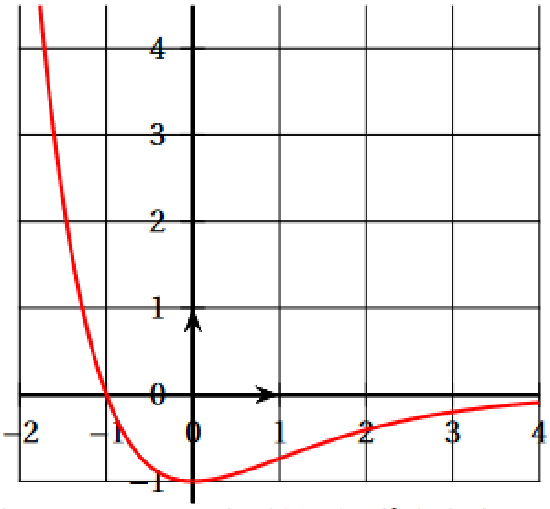
```
n = 0
Tant que …
        n = n + 1
Afficher n
```

Exercice 2 (5 points)

Partie A
On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie B
On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie A est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \frac{x}{e^x} + 2e^{-x}$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Justifier que la courbe C admet une asymptote que l'on précisera.

On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$

b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\ ;-1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f. Que représente pour la courbe C son point A d'abscisse 0 ?

Exercice 3. (5 points)

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable. Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n).
Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le *n*-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi a_0 =200.

Partie A :

1. Calculer a_1.

2. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85a_n + 450$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.

   b. Exprimer v_n en fonction de *n* pour tout entier naturel *n*.

   c. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $a_n = -2800 \times 0{,}85^n + 3000$.

4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :
Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de *n* mois après le mois de mai 2020.

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur [0 ; +∞[.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

b. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Exercice 4. (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer ***<u>sur la copie</u>*** *le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.*

1. Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = -\frac{3}{x^2+1} + k$, où $k \in$ **R**.

   La courbe représentative de cette fonction :
   a) admet une asymptote horizontale d'équation $x = k$.
   b) admet une asymptote horizontale d'équation $y = k$.
   c) admet une asymptote verticale d'équation $y = k$.
   d) admet deux asymptotes.

2. Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = (-3x+4)^4$.

   a) $f''(x) = 12(-3x+4)^2$.
   b) $f''(x) = 108(-3x+4)^2$.
   c) La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion.
   d) f' est décroissante sur $\left]-\infty; \frac{4}{3}\right]$.

3. Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x^2\, e^{x^2}$ et f' sa fonction dérivée.

   a) $f'(x) = 2x\, e^{x^2}$.
   b) $f'(x) = 4x^2\, e^{x^2}$.
   c) $f'(x) = (2x + x^2)\, e^{x^2}$.
   d) $f'(x) = 2x\,(1 + x^2)\, e^{x^2}$.

4. Soit f une fonction définie sur **R** telle que : $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 9$
   et g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x}$.

   a) $\lim\limits_{x \to 2} (fog)(x) = 3$.
   b) $\lim\limits_{x \to 2} (fog)(x) = 9$.
   c) $\lim\limits_{x \to 4} (fog)(x) = 9$.
   d) $\lim\limits_{x \to 16} (fog)(x) = 9$.

5. Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x) = \begin{cases} x + k^2 & si\ \ x < 2 \\ 2x + 2k + 1 & si\ 2 \leq x < 5 \\ 17 & si\ x \geq 5 \end{cases}$.

   a) f est continue sur **R** pour $k = 3$.
   b) f est continue sur **R** pour $k = -1$.
   c) f est continue sur **R** pour $k = -1$ et $k = 3$.
   d) Il n'existe pas de valeur de k pour laquelle f est continue sur **R**.

6. Soit u une suite numérique définie sur **N**.

   a) Si u est majorée alors u est convergente.
   b) Si u est croissante, alors u est convergente.
   c) Si u est n'est pas majorée, alors u est divergente.
   d) Si u n'est pas croissante alors u est divergente.

7. Soit u une suite numérique, définies sur **N** telle que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et v la suite numérique définie sur **N**, par : $v_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

   a) Si u est convergente, alors v est convergente.
   b) Si u est divergente, alors v est convergente.
   c) Si u est bornée, alors v est bornée.
   d) Si u est monotone, alors v est monotone.

8. Soit S la suite définie sur **N*** par $S_n = 3 + 3^2 + \ldots + 3^n$.

   a) $S_n = \frac{n(3+3^n)}{2}$.
   b) $S_n = \frac{3(3^n - 1)}{2}$.
   c) $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$.
   d) $S_n = \frac{3^n - 3}{2}$.

9. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω tels que :
   $P(A) = 0{,}4$ $P(B) = 0{,}4$ $P(A \cup B) = 0{,}64$.

   a) A et B sont égaux.
   b) A et B sont incompatibles.
   c) A et B sont indépendants.
   d) A et B forment une partition de Ω.

10. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω.

   a) $p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.
   b) $p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - p_B(A)$.
   c) $p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - p_A(\overline{B})$.
   d) $p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - p_{\overline{A}}(B)$.