BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE DE SPÉCIALITÉ

SESSION décembre 2020

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Le candidat traite **4 exercices** : les exercices 1, 2 et 3 communs à tous les candidats et **un seul** de deux exercices A ou B.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6.

<u>Exercice 1</u> – Commun à tous les candidats (5 points)

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2020, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville et 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

	A	B
1	n	pop en zone rurale
2	0	90
3	1	82,5
4	2	76,125
5	3	70,70625
6	4	66,1003125
7	5	62,18526563
8	6	58,85747578
9	7	56,02885441
10	8	53,62452625
11	9	51,58084731
12	10	49,84372022
13	11	48,36716218
14	12	47,11208786
15	13	46,04527468
16	14	45,13848348
17	15	44,36771096
18	16	43,71255431
19	17	43,15567117
20	18	42,68232049
21	19	42,27997242
22	20	41,93797655
23	21	41,64728007
24	22	41,40018806
25	23	41,19015985
26	24	41,01163587
27	25	40,85989049
28	26	40,73090692
29	27	40,62127088
30	28	40,52808025
31	29	40,44886821
32	30	40,38153798
33	31	40,32430728
34	32	40,27566119
35	33	40,23431201
36	34	40,19916521
37	35	40,16929043

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année 2020+n, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année 2020+n, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

On peut modéliser l'évolution de la population rurale par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 6$.

<u>Partie A</u>

1) On utilise un tableur pour visualiser l'évolution de la suite (u_n).
Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 qui, recopiée vers le bas, permet d'obtenir la feuille de calcul ci-contre.
2) Quelle conjecture peut-on faire sur l'évolution à long terme de cette population rurale ?

<u>Partie B</u>

1) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 90$.
   b) La suite (u_n) est-elle convergente ? (justifier)
2) On considère la suite (w_n) définie par $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geq 0$.
   a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
   b) En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
   c) Valider ou invalider la conjecture effectuée à la question 2 de la partie A.

<u>Partie C</u>

1) Exprimer v_n en fonction de u_n en utilisant le fait que la population totale est constante.
2) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous permettant d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle le nombre de ruraux est devenu strictement inférieur au nombre de citadins.

```
n prend la valeur 0
u prend la valeur  …………….
Tant que …………………..
        n prend la valeur …………………
        u prend la valeur ……………….
Fin tant que
Afficher n
```

<u>Exercice 2</u> – Commun à tous les candidats (7 points)

<u>Partie A</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

1) Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
2) Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.
   En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.
4) Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.

<u>Partie B</u>

1) Montrer que $f''(x) = e^{1-x}(x-2)$, puis en déduire la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2) La courbe C_f représentant la fonction f admet-elle un point d'inflexion ? (si oui, préciser l'abscisse de ce point)
3) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
4) Quelle est la position relative de T et de C_f sur $]-\infty\ ; 2]$?

<u>Partie C</u>

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -(x+1)e^{1-x}$.

1) Montrer que la dérivée g' de la fonction g est telle que $g'(x) = f(x)$ pour tout réel x.
2) On considère la droite Δ tangente à la courbe représentative de la fonction g au point A.
   Δ a pour coefficient directeur -1. Quelle est l'abscisse du point A ?
3) Montrer que $e^{1-\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$ et en déduire l'ordonnée du point A en fonction de α.

<u>Exercice 3</u> – Commun à tous les candidats (3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

	Pour les questions 1 à 3, on considère la fonction f définie sur $]7\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{(x-7)^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.	
1	La fonction dérivée de f est donnée par :	
	a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{2(x-7)}$	b) $f'(x) = 1 + \frac{2}{(x-7)^3}$
	c) $f'(x) = 1 - \frac{2}{(x-7)^3}$	d) $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-7)^4}$
2	Parmi les limites suivantes, quelle est celle qui est correcte ?	
	a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
	c) $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x > 7}} f(x) = 0$	d) $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x > 7}} f(x) = 7$
3	La courbe C_f admet une asymptote d'équation :	
	a) $y = 7$	b) $y = 0$
	c) $x = 0$	d) $x = 7$
4	On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = 2x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$. L'expression de la fonction $u \ o \ v$, définie sur $\mathbb{R}$	
	a) $(u \ o \ v)(x) = 2e^{2x} + 1$	b) $(u \ o \ v)(x) = e^{2x^2+1}$
	c) $(u \ o \ v)(x) = (2x^2 + 1)e^x$	d) $(u \ o \ v)(x) = 2e^{x^2} + 1$
5	La fonction h telle que $h(x) = e^x - \sqrt{x}$	
	a) est convexe sur $]0\,;+\infty[$	b) n'est ni concave, ni convexe sur $]0\,;+\infty[$
	c) est concave sur $]0\,;+\infty[$	d) est convexe sur $\mathbb{R}$
6	Soit m un réel et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 3 & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 8x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ pour :	
	a) m = 15	b) m = - 8
	c) m = - 4	d) m = 8

Exercice au choix du candidat (5 points)

Le candidat doit traiter **un seul des deux exercices** A ou B.
Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.
Pour éclairer son choix, les principaux domaines abordés par chaque exercice sont indiqués dans un encadré.

Exercice A – (5 points)

Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles Combinatoire et dénombrement

Partie A

Pour mieux cerner le profil de ses clients, une banque réalise un sondage qui permet d'établir que :

- 53% de ses clients ont plus de 50 ans ;
- 32% de ses clients sont intéressés par des placements dits risqués ;
- 25% de ses clients de plus de 50 ans sont intéressés par des placements dits risqués.

On choisit au hasard un client de cette banque et on considère les évènements suivants :

- A : « le client a plus de 50 ans » ;
- R : « le client est intéressé par des placements dits risqués ».

1) Donner $p(A)$, $p(R)$ et $p_A(R)$.
2) Représenter la situation par un arbre pondéré qui pourra être complété par la suite.
3) Montrer que la probabilité que le client ait plus de 50 ans et soit intéressé par des placements dits risqués est 0,1325.
4) Sachant que le client est intéressé par des placements dits risqués, quelle est la probabilité qu'il ait plus de 50 ans ? (arrondir le résultat à 10^{-3} près)
5) Calculer $p(\overline{A} \cap R)$ et interpréter le résultat.
6) En déduire $p_{\overline{A}}(R)$ et interpréter le résultat. (arrondir ce résultat à 10^{-3} près)

Partie B

Pour motiver ses collaborateurs, cette banque organise un challenge qui opposera 9 de ses agences.

1) Chaque agence doit constituer une **équipe de 5 conseillers**.
   Camille est une des conseillères de l'agence A, qui compte 12 conseillers : 5 femmes et 7 hommes.
   On suppose que les équipes sont constituées au hasard.
   a) Combien d'équipes différentes peut-on constituer au sein de l'agence A ?
   b) Camille étant la conseillère la plus performante de l'agence A, il est convenu qu'elle fera partie de l'équipe de cette agence. Combien d'équipes différentes peut-on alors constituer au sein de l'agence A ?
   c) Une autre option envisagée est de constituer des équipes qui comptent exactement 2 femmes. Combien d'équipes différentes peut-on alors constituer au sein de l'agence A ?
2) Chacune des neuf équipes doit convaincre un maximum de clients de souscrire un placement risqué. Parmi ces 9 équipes, 4 sont issues d'agences parisiennes et 5 sont issues d'agences de province. Les trois premières équipes du **classement** figureront sur le podium des meilleures agences de cette banque.
   a) Combien y a-t-il de podiums différents.
   b) Combien y a-t-il de podiums différents comportant une équipe issue d'une agence parisienne en première position ?

Exercice B – (5 points)

Principaux domaines abordés : Probabilités conditionnelles Loi binomiale

Partie A

Pour mieux cerner le profil de ses clients, une banque réalise un sondage qui permet d'établir que :

- 53% de ses clients ont plus de 50 ans ;
- 32% de ses clients sont intéressés par des placements dits risqués ;
- 25% de ses clients de plus de 50 ans sont intéressés par des placements dits risqués.

On choisit au hasard un client de cette banque et on considère les évènements suivants :

- A : « le client a plus de 50 ans » ;
- R : « le client est intéressé par des placements dits risqués ».

1) Donner $p(A)$, $p(R)$ et $p_A(R)$.
2) Représenter la situation par un arbre pondéré qui pourra être complété par la suite.
3) Montrer que la probabilité que le client ait plus de 50 ans et soit intéressé par des placements dits risqués est 0,1325.
4) Sachant que le client est intéressé par des placements dits risqués, quelle est la probabilité qu'il ait plus de 50 ans ? (arrondir le résultat à 10^{-3} près)
5) Calculer $p(\overline{A} \cap R)$ et interpréter le résultat.
6) En déduire $p_{\overline{A}}(R)$ et interpréter le résultat. (arrondir ce résultat à 10^{-3} près)

Partie B

Dans cette partie, on arrondira les probabilités à 10^{-3} près.

L'une des agences de cette banque charge ses conseillers de proposer un placement dit risqué à tous ses clients.
Elle promet à tous ses conseillers une prime de 150 € s'ils parviennent, en un mois, à convaincre au moins 10 clients d'effectuer ce placement.
Elle ajoutera une prime supplémentaire de 150 € s'ils parviennent, en un mois, à convaincre au moins 15 clients d'effectuer ce placement.

L'une des conseillères de cette banque, Camille, reçoit 45 clients ce mois-ci. On admet que la probabilité que Camille réussisse à convaincre l'un de ses clients d'effectuer ce placement est de 0,23 et que la décision d'un client est indépendante de celle des autres clients.
Soit X la variable aléatoire qui, parmi une série de 45 clients reçus par Camille en un mois, associe le nombre de clients convaincus.

1) Quelle est la loi suivie par X ?
2) Déterminer la probabilité que Camille ait réussi à convaincre 10 clients exactement ce mois-ci.
3) Déterminer la probabilité que Camille ait réussi à convaincre au moins 1 client ce mois-ci.
4) Calculer la probabilité que Camille obtienne exactement 150 € de prime.
5) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.