Mercredi 6 novembre 2019 Term S

<u>DEVOIR de Mathématiques (1h50.)</u>

(Calculatrice autorisée)

<u>Exercice 1</u> *(10 points)*

On note **C** l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.
On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z)= z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.

2. Résoudre dans **C** l'équation $f(z) = 5$.
Écrire sous forme trigonométrique les solutions de cette équation.
Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).
On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$¸ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs de λ¸ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$¸ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie

$$|f(z) - 8| = 3.$$

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\ ;\ 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est

$$x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y).$$

b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

<u>Exercice 2</u> *(10 points)*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 4] par :

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 4].

3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

4. **a.** Montrer que la suite (u_n) est convergente.

b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

c. Déterminer la valeur de la limite ℓ.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$v_0 = 0{,}1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = f(v_n)$.

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative C_f, de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1, v_2 et v_3 sur **l'annexe, à rendre avec la copie**.
Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini ?

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4+v_n}\right)(1 - v_n)$$

b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n,

$$0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle ? Si oui, préciser sa limite.

NOM & Prénom : ....

Annexe

À rendre avec la copie