Vendredi 22 février 2019 Term S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(10 points)*

L'épicéa commun est une espèce d'arbre résineux qui peut mesurer jusqu'à 40 mètres de hauteur et vivre plus de 150 ans.
L'objectif de cet exercice est d'estimer l'âge et la hauteur d'un épicéa à partir du diamètre de son tronc mesuré à 1,30 m du sol.

Partie A – Modélisation de l'âge d'un épicéa

Pour un épicéa dont l'âge est compris entre 20 et 120 ans, on modélise la relation entre son âge (en années) et le diamètre de son tronc (en mètres) mesuré à 1,30 m du sol par la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = 30 \ln\left(\frac{20x}{1-x}\right)$$

où x désigne le diamètre exprimé en mètre et $f(x)$ l'âge en années.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,1[$.

2. Déterminer les valeurs du diamètre x du tronc tel que l'âge calculé dans ce modèle reste conforme à ses conditions de validité, c'est-à-dire compris entre 20 et 120 ans.

Partie B

On a relevé la hauteur moyenne des épicéas dans des échantillons représentatifs d'arbres âgés de 50 à 150 ans. Le tableau suivant, réalisé à l'aide d'un tableur, regroupe ces résultats et permet de calculer la vitesse de croissance moyenne d'un épicéa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Âges (en années)	50	70	80	85	90	95	100	105	110	120	130	150
2	Hauteurs (en mètres)	11,2	15,6	18,05	19,3	20,55	21,8	23	24,2	25,4	27,6	29,65	33
3	Vitesse de croissance (en mètres par année)		0,22	0,245	0,25								

1. **a.** Interpréter le nombre 0,245 dans la cellule D3.
b. Quelle formule doit-on entrer dans la cellule C3 afin de compléter la ligne 3 en recopiant la cellule C3 vers la droite?

2. Déterminer la hauteur attendue d'un épicéa dont le diamètre du tronc mesuré à 1,30 m du sol vaut 27 cm.

3. La qualité du bois est meilleure au moment où la vitesse de croissance est maximale.

a. Déterminer un intervalle d'âges durant lequel la qualité du bois est la meilleure en expliquant la démarche.
b. Est-il cohérent de demander aux bûcherons de couper les arbres lorsque leur diamètre mesure environ 70 cm ?

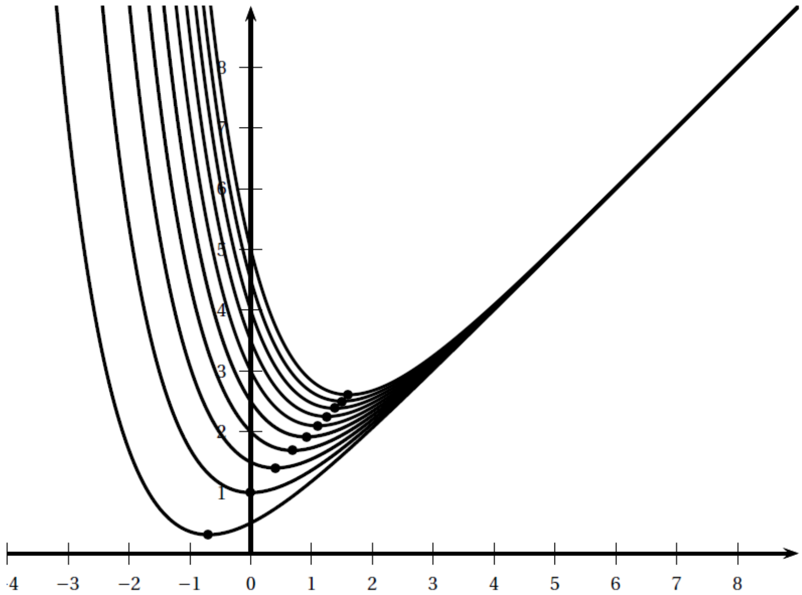
…/…

<u>Exercice 2</u> *(5 points)*

Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions f_k définies sur **R** par :

$f_k\,(x) = x + k\,e^{-x}$.

On note (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.
On a représenté ci-dessous quelques courbes (C_k) pour différentes valeurs de k.



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur **R**. La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point noté A_k de la courbe (C_k).
Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est-ce le cas ?

<u>Exercice 3</u> *(5 points)*

Soit ABCDEFGHIJKL un prisme droit à base hexagonale :

- ABCDEF et GHIJKL sont deux hexagones réguliers de mêmes dimensions
- ABHG, BCIH, CDJI, DEKJ, EFLK et FAGL sont six rectangles de mêmes dimensions

On place les points M, N et O tels que : $\overrightarrow{\mathrm{DM}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{DJ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EN}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{EK}}$ et O milieu de [BC]

Le but de l'exercice est de tracer la section du prisme par le plan (MNO), puis l'intersection des plans (MNO) et (ABH). ***<u>Ne pas reproduire la figure fournie !</u>***

1°) Que peut-on dire des plans (ABC) et (KED) ?
En utilisant le théorème du toit, déterminer l'intersection du plan (MNO) avec le plan (ABC).

2°) On appelle P le point d'intersection du plan (MNO) et de la droite (EF).
Quelle est l'intersection du plan (MNO) avec le plan (KEF) ?

3°) Que peut-on dire des plans (ICB) et (KEF) ?
En déduire l'intersection du plan (MNO) avec le plan (ICB).

4°) Tracer, en trait épais ou en couleur, la section du prisme droit par le plan (MNO).

5°) Déterminer une construction de l'intersection des plans (MNO) et (ABH).
(<u>Remarque</u> : Cela se situe en dehors de la face ABHG)

Nom et prénom : …………………………………………………………………

Exercice 3