Mercredi 7 novembre 2018 Term S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(10 points)*

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5% par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en 2016 + n. On a donc : $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Calculer $\lim_{v \to +\infty} v_n$. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par :
$u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605} u_n^2 + 1,1\, u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur **R** par :

$$g(x) = -\frac{1,1}{605} x^2 + 1,1\, x.$$

a. Justifier que g est croissante sur [0 ; 60].
b. Résoudre dans **R** l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.
c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
d. En déduire la convergence de la suite (u_n).
e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$.
En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que ....
	u prend la valeur ....
	n prend la valeur ....
	Fin Tant Que
Sortie	Afficher ....

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.

.../...

<u>Exercice 2</u> *(10 points)*

Le plan est muni du repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
On donne le nombre complexe : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre *j* et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre *j*

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$.
b. Vérifier que le nombre complexe *j* est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe *j*, puis donner sa forme trigonométrique.

3. Démontrer les égalités suivantes :
a. $j^3 = 1$.
b. $j^2 = -1 - j$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, *j* et j^2 dans le plan.
Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit *a*, *b*, *c* trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + j\,b + j^2\,c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres *a*, *b*, *c* dans le plan.

1. En utilisant la question A-3. b., démontrer l'égalité : $a - c = j\,(c - b)$.

2. En déduire que AC = BC.

3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2\,(b - c)$.

4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.