Mercredi 30 mars 2016 1°S

DEVOIR de Mathématiques (3h)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(2,5 points)*

Une usine d'embouteillage d'eau minérale produit et conditionne des bouteilles de 1,5 litre.

On prélève de façon aléatoire 100 bouteilles à la fin de la chaîne de production et on mesure le volume d'eau minérale qu'elles contiennent réellement.

Volume (en cL)	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155
Effectif	2	3	5	12	18	21	17	11	7	3	1

1°) Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ cette série.

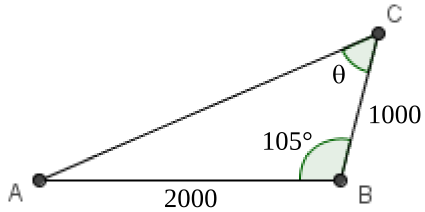
2°) La production est conforme à la législation lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- $145{,}5 \leq \bar{x} \leq 154{,}5$
- $\sigma \leq 2{,}25$
- Au moins 95% des valeurs de l'échantillon sont dans l'intervalle $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$

La production de cette usine est-elle conforme ?

Exercice 2 *(2,5 points)*

On modélise le parcours d'une régate par le triangle ABC ci-dessous.



Les longueurs sont exprimées en mètres.

1°) Calculer la longueur totale du parcours.

2°) Calculer l'angle θ que doit choisir le skipper pour revenir au point de départ A.

Exercice 3 *(5 points)*

Dans un repère orthonormé, on considère les points :

A(–2 ; 3), B(–1 ; 0) et C(4 ; 0).

On note Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et d la droite d'équation :

$x + y - 9 = 0$.

On souhaite démontrer que la droite d est tangente au cercle Γ.

1°) Après avoir déterminé des équations cartésiennes de deux médiatrices au triangle ABC, déterminer le centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC.

2°) Déterminer une équation du cercle Γ.

3°) Le cercle Γ et la droite d sont-ils sécants ? Si oui, préciser le(s) point(s) d'intersection éventuel(s).

4°) Conclure.

Remarque : On pourra faire une figure au brouillon pour vérifier ses résultats au fur et à mesure mais celle-ci n'est pas demandée…

Exercice 4 *(5 points)*

On se propose de résoudre l'équation (E) : $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$ sur **R**.

1°) (E) admet une « solution évidente », laquelle ?

2°) Première méthode de résolution.

a) Montrer que l'équation (E) se ramène à l'équation (E_1) : $\cos(x - \pi/4) = 1$.
b) Résoudre l'équation (E_1) sur **R**.

3°) Deuxième méthode de résolution.

a) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} X + Y = \sqrt{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$.
b) En posant $X = \cos x$ et $Y = \sin x$, justifier que l'équation (E) se ramène au système précédent.
c) En déduire une résolution de (E) sur **R**.

4°) Troisième méthode de résolution.

a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \sin(2x)$.
b) En déduire que l'équation (E) se ramène à l'équation (E_3) : $\sin(2x) = 1$.
c) En déduire une résolution de (E_3) sur **R**.

5°) Comparer les trois démarches proposées.

Exercice 5 *(5 points)*

1°) Soit g la fonction définie sur **R** par :

$$g(x) = x^3 + 6x^2 + 1.$$

a) Déterminer les variations de g et dresser son tableau de variations.
b) Déterminer le minimum et le maximum de g sur $[-5 ; 5]$.
c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-4 ; +\infty[$.

2°) Soit f la fonction définie sur $]-4 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x + 4}$$

a) Déterminer une expression de $f'(x)$.
b) A l'aide de la question 1°), en déduire les variations de f sur $]-4 ; +\infty[$.