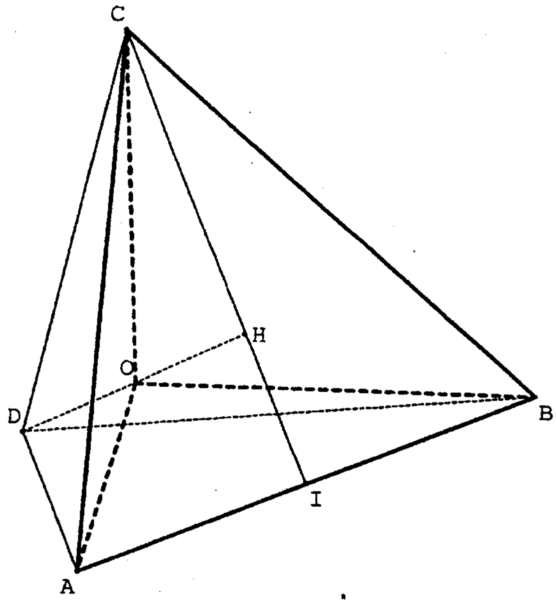
Exercice 2 *(5 points)*

(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Soient a un réel strictement positif.
et OABC un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O.
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Calcul de OH.

   a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.

   b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que $OH = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Étude du tétraèdre ABCD.

   L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{OA},\frac{1}{a}\overrightarrow{OB},\frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.

   a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

   b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

   c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.
   Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.