Chap 4. Continuité, dérivabilité et convexité

Livre p 223 – Chap 7. Compléments sur la dérivation
Livre p 253 – Chap 8. Fonctions continues

1. Continuité d'une fonction

a. Continuité en un point

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et $a \in$ I, on dit que *f* est continue en *a* si et seulement si tout intervalle ouvert contenant *f*(*a*) contient toutes les valeurs de *f*(*x*) pour *x* suffisamment proche de *a*.
C'est-à-dire que : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)$

b. Continuité sur un intervalle

On dit que *f* est continue sur I si et seulement si *f* est continue en tout point *a* de I.

c. Fonctions usuelles et opérations

On admet que toutes les fonctions usuelles vues en $1^{\text{ère}}$ et Term sont continues sur leur ensemble de définition (fonctions : affine, carré, cube, inverse, racine carrée, exponentielle, sinus et cosinus)
On admet également que si *f* et *g* sont deux fonctions continues, alors leur somme, opposé, différence, produit, inverse, quotient et composée sont continues sur leurs ensembles de définition.

- Exemple d'une fonction non continue :
  La fonction « Partie entière » définie par : E(*x*) = *n* où *n* est l'unique entier relatif tel que $n \leq x < n + 1$.

d. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle [*a* ; *b*].
Pour tout réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), il existe au moins un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que *f*(*c*) = *k*.

e. Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Soit *f* une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle [*a* ; *b*]. Pour tout réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*), il existe un unique réel *c* compris entre *a* et *b* tel que *f*(*c*) = *k*.
Remarque : On peut remplacer [*a* ; *b*] par]*a* ; *b*[. en remplaçant *f*(*a*) et *f*(*b*) par $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$
Application : Recherche d'une valeur approchée d'une équation.

f. Retour sur les suites récurrentes

Démonstration du théorème du point fixe.

2. Compléments sur la dérivation

a. Rappel : Nombre dérivé en un point

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et $a \in$ I, on dit que *f* est dérivable en *a* si la limite suivante existe et est un nombre fini, on note alors *f'*(*a*) sa valeur :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

b. Rappel : Equation de la tangente

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et $a \in$ I. Si *f* est dérivable en *a*, alors la courbe (C_f) représentative de *f* admet une tangente au point d'abscisse *a* d'équation (T) : $y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$.

c. Cas particuliers

Si la limite du taux d'accroissement en a est infinie, la fonction n'est pas dérivable en a et sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse a. (Exemple : la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$)
Si la limite du taux d'accroissement en a est différente à gauche et à droite de a, la fonction n'est pas dérivable en a et sa courbe représentative admet deux demi-tangentes différentes à gauche et à droite au point d'abscisse a. (Exemple : la fonction $x \mapsto |x|$)

d. Approximation affine en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in$ I. Si f est dérivable en a, alors on peut écrire :

$$f(a + h) = f(a) + h \times f'(a) + h \times \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

donc : pour h proche de 0, on a :

$$f(a + h) \approx f(a) + h \times f'(a)$$

cette expression est une approximation affine de f au voisinage de a.

e. Rappel : Fonction dérivée

On dit que f est dérivable sur I si f admet un nombre dérivé en tout point de I, on note f' sa fonction dérivée qui à tout réel x de I associe sont nombre dérivé $f'(x)$.

f. Théorème

Toute fonction dérivable sur I est continue sur I (Attention : Pas de réciproque !)

g. Rappel : Formules vues en 1ère

➢ Fonctions usuelles :

$f(x)$	f définie sur	f dérivable sur	$f'(x)$
$ax + b$	**R**	**R**	a
x^2	**R**	**R**	$2x$
x^3	**R**	**R**	$3x^2$
x^n	**R**	**R**	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	**R***	**R***	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$]0 ; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	**R**	**R**	e^x

➢ Opérations :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I et k une constante, alors :

- Si $f = u + v$, f est dérivable et $f' = u' + v'$.
- Si $f = u - v$, f est dérivable et $f' = u' - v'$.
- Si $f = k \times u$, f est dérivable et $f' = k \times u'$. Attention : k est ici une constante !
- Si $f = u \times v$, f est dérivable et $f' = u' \times v + u \times v'$.
- Si $f = u^2$, f est dérivable et $f' = 2 \times u' \times u$.
- Si $f = \frac{1}{v}$, f est dérivable et $f' = -\frac{v'}{v^2}$.
- Si $f = \frac{u}{v}$, f est dérivable et $f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.

h. Dérivée d'une composée

Rappel de 1ère : Dérivée d'une composée affine, avec a et b deux constantes.

Si g est dérivable et que $f(x) = g(ax + b)$ alors f est dérivable et $f'(x) = a \times g'(ax + b)$

Application : Avec a et b deux constantes

- Si $f(x) = (ax + b)^2$, f est dérivable et $f'(x) = 2a\,(ax + b)$.
- Si $f(x) = (ax + b)^3$, f est dérivable et $f'(x) = 3a\,(ax + b)^2$.
- Si $f(x) = (ax + b)^n$, f est dérivable et $f'(x) = na\,(ax + b)^{n-1}$.
- Si $f(x) = \frac{1}{ax+b}$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{-a}{(ax+b)^2}$.
- Si $f(x) = \sqrt{ax + b}$ et que $ax + b > 0$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.
- Si $f(x) = e^{ax+b}$, f est dérivable et $f'(x) = a\,e^{ax+b}$.

Plus généralement :

Si u et v sont dérivables et que $f = g \circ u$, alors f est dérivable et $f' = u' \times (g' \circ u)$

C'est-à-dire que si $f(x) = g[u(x)]$ alors $f'(x) = u'(x) \times g'[u(x)]$

Application : Avec u une fonction dérivable

- Si $f(x) = [u(x)]^2$, f est dérivable et $f'(x) = 2\,u'(x) \times u(x)$.
- Si $f(x) = [u(x)]^3$, f est dérivable et $f'(x) = 3\,u'(x) \times [u(x)]^2$.
- Si $f(x) = [u(x)]^n$, f est dérivable et $f'(x) = n\,u'(x) \times [u(x)]^{n-1}$.
- Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$, et que $u(x) > 0$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.
- Si $f(x) = e^{u(x)}$, f est dérivable et $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$.

3. Convexité d'une fonction

a. Dérivée seconde et suivantes

Soit f une fonction dérivable sur I et f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable sur I, on note f'' sa fonction dérivée, appelée fonction dérivée seconde de f sur I.

On définit ainsi par récurrence la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'une fonction f, notée $f^{(n)}$: $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$

b. Caractérisation des fonctions convexes

Une fonction f est dite convexe sur un intervalle I si et seulement si :

Pour tout intervalle [a ; b], la courbe (C_f) est en-dessous de la corde [AB].

Ce qui équivaut à :
- Si f est dérivable, la courbe (C_f) est au-dessus de toutes ses tangentes sur I.
- Si f est dérivable, f' est croissante sur I.
- Si f est deux fois dérivables, f'' est positive sur I.

c. Caractérisation des fonctions concaves

Une fonction f est dite concave sur un intervalle I si et seulement si :

Pour tout intervalle [a ; b], la courbe (C_f) est au-dessus de la corde [AB].

Ce qui équivaut à :
- Si f est dérivable, la courbe (C_f) est en-dessous de toutes ses tangentes sur I.
- Si f est dérivable, f' est décroissante sur I.
- Si f est deux fois dérivables, f'' est négative sur I.

d. Inégalités de convexité

Si f est convexe sur I, alors pour tout a et b de I, on a : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

Si f est concave sur I, alors pour tout a et b de I, on a : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

e. Point d'inflexion d'une courbe

Soit f une fonction, (C_f) sa courbe représentative et A un point de (C_f).

On dit que A est un point d'inflexion de (C_f) si et seulement si la fonction change de convexité en A.

C'est-à-dire que :
- La courbe (C_f) traverse sa tangente en A.
- Si f est deux fois dérivable, alors f'' change de signe en A.