Chap 3. Succession d’épreuves indépendantes

Livre p 399 – Chap 13. Succession d’épreuves indépendantes

1. Notations et opérations sur les ensembles

a. Vocabulaire

- **Ensemble vide** : Ensemble ne contenant aucun élément, il est noté $\varnothing$.
- **Union** : $A\cup B$ est l’ensemble des éléments se trouvant dans A **ou** dans B (éventuellement dans les deux !)
- **Intersection** : $A\cap B$ est l’ensemble des éléments se trouvant à la fois dans A **et** dans B.
  Cas particulier : Deux ensembles sont disjoints lorsque $A\cap B = \varnothing$.
- **Inclusion** : $A\subset B$ signifie que tous les éléments de A sont aussi dans B.
  Remarques : $A\subset A$ et $\varnothing\subset A$,
  de plus : si $A\subset B$ et $B\subset A$ alors $A = B$.
- **Complémentaire** : $E\backslash A$ ou $\overline{A}$ représente l’ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A.
  Remarques : $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{E} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = E$.
- **Ensemble des parties** : $\mathscr{P}(E)$ représente l’ensemble des ensembles que l’on peut construire avec des éléments de E.
  Remarque : $\varnothing$ et les singletons (ensembles ne contenant qu’un seul élément) sont dans $\mathscr{P}(E)$.
  Attention : Ne pas confondre avec les symboles « $\subset$ » et « $\in$ ». $A\in\mathscr{P}(E)$ équivaut à $A\subset E$.

b. Propriétés de l’union et de l’intersection :

- **Avec l’ensemble vide** : $A\cup\varnothing = A$ et $A\cap\varnothing = \varnothing$.
- **Avec l’inclusion** : Si $A\subset B$, alors : $A\cup B = B$ et $A\cap B = A$.
- **Associativité** : $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ et $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$.
- **Commutativité** : $A\cup B = B\cup A$ et $A\cap B = B\cap A$.
- **Distributivité** : $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ et $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$.
- **Lois de Morgan** : $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$.

c. Cardinal d’un ensemble fini

On appelle cardinal de A, le nombre d’éléments de A, il est noté : Card(A).
Remarque : $\text{Card}(\varnothing) = 0$.

d. Propriété du cardinal

Avec l’union et l’intersection : $\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A\cap B)$
Cas particulier des ensembles disjoints : Si $A\cap B = \varnothing$ alors : $\text{Card}(A\cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$

2. Rappels : Lois de probabilité

a. Vocabulaire

- **Expérience aléatoire** : Une expérience aléatoire est une expérience qui peut être répétée dans les mêmes conditions mais dont l’issue est incertaine.
- **Issue** : Une issue d’une épreuve aléatoire est un résultat possible de cette expérience.
- **Univers** : L’ensemble de toutes des issues d’une épreuve aléatoire est appelé univers, généralement noté Ω.
- **Événements** : Un événement est un ensemble d’issues d’une épreuve aléatoire.

- **Événement certain** : L'univers Ω est appelé événement certain.
- **Événement impossible** : L'ensemble vide $\varnothing$ est appelé événement impossible.
- **Événement élémentaire** : Un événement ne comportant qu'une seule issue (un singleton) est appelé événement élémentaire.
- **Événement contraire** : Si A représente un événement alors $\overline{\mathrm{A}}$ représente l'événement contraire.
- **Événements incompatibles** : Si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ on dit que les événements A et B sont incompatibles

b. Loi de probabilité

Définir une loi de probabilité sur un univers, consiste à attribuer une probabilité (entre 0 et 1) à chaque issue de telle sorte que leur somme soit égale à 1. La probabilité d'un événement est alors la somme des probabilités des issues qui le constituent.

Remarque : Dans un **cas d'équiprobabilité**, les probabilités des événements élémentaires valent toutes $^1/_n$ où n = Card(Ω) et donc, pour tout événement, on a : $P(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{Card(A)}}{\mathrm{Card}(\Omega)}$

c. Propriétés

Si $\mathrm{A} \subset \Omega$ alors $P(\mathrm{A}) \in [0 ; 1]$, en particulier : $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.

$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$ si A et B sont incompatibles

$P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$

d. Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire réelle X est une fonction qui attribue à chaque issue, une valeur réelle x_i.

On note $(X = x_i)$ l'événement « la variable aléatoire X prend la valeur x_i » et $P(X = x_i)$ sa probabilité.

Remarque : Une même valeurs x_i peut être attribuée à plusieurs issues différentes.

Propriété : $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$.

Espérance mathématique : $\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i)$

Variance : $\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times P(X = x_i) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \mathrm{E(X)}]^2 \times P(X = x_i)$

Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$

3. Rappels : Probabilités conditionnelles

a. Probabilités conditionnelles

Si $P(\mathrm{A}) \neq 0$, $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{B} \cap \mathrm{A})}{P(\mathrm{A})}$ est appelée probabilité conditionnelle de B sachant A.

P_{A} définie une loi de probabilité sur Ω, on a donc toutes les propriétés du 1°).

De plus : $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ et si $P(\mathrm{A}) \neq 0$, $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) \times P_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$

Remarque : si $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, alors $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = 1$.

b. Formule des probabilités totales

Soit $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ une partition de Ω, alors $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + \ldots + P(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B})$

Donc : $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}_1) \times P_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}) + P(\mathrm{A}_2) \times P_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}) + \ldots + P(\mathrm{A}_n) \times P_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B})$.

Cas particulier : A et $\overline{\mathrm{A}}$ forment une partition, donc : $P(\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + P(\overline{\mathrm{A}}) \times P_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$

Représentations : Arbre pondéré : Somme des probabilités des branches sur un même nœud
Produit des probabilités des branches de la racine à la feuille.
Tableau : Somme égale à 1.

c. Evénements indépendants

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
Remarque : dans ce cas : Si $P(A) \neq 0$, $P_A(B) = P(B)$ et si $P(B) \neq 0$, $P_B(A) = P(A)$.

d. Succession d'une même épreuve répétée de manières indépendantes

Lors de la répétition de n fois la même épreuve aléatoire de manières indépendantes, on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A se produit.
Propriétés :
La probabilité d'obtenir n fois l'événement A vaut : $P(X = n) = [P(A)]^n$
La probabilité de ne jamais obtenir l'événement A vaut : $P(X = 0) = [P(\overline{A})]^n$
La probabilité d'obtenir au moins une fois l'événement A vaut : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - [P(\overline{A})]^n$
Remarque : Abus de notations dans l'arbre pondéré.

4. Loi binomiale

a. Epreuve de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p une expérience aléatoire ne comportant que deux issues : succès ou échec, où p est la probabilité du succès.

b. Loi de Bernoulli

On définit la variable aléatoire X égale à 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
$P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$. E$(X) = p$ et V$(X) = p(1 - p)$

c. Schéma de Bernoulli

On note $B(n, p)$ l'expérience aléatoire consistant à répéter n fois de manières indépendantes la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Remarque : Abus de notations dans l'arbre pondéré.

d. Loi binomiale

On définit la variable aléatoire Y égale au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli $B(n, p)$.
Y prend donc les valeurs de 0 à n et on a :

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

où $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins menants à k succès dans l'arbre de Bernoulli (Voir Ch. 11)

e. Espérance, variance et écart-type

E$(Y) = np$
V$(Y) = np(1 - p)$
$\sigma(Y) = \sqrt{np(1-p)}$

f. Intervalle de fluctuation

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.
Soit a et b deux entiers tels que :
a est le plus petit entier tel que $P(Y \leq a)$ soit supérieure à 0,025
b est le plus petit entier tel que $P(Y \leq b)$ soit supérieure ou égale à 0,975
L'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ est alors appelé intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

g. Prise de décision

On émet l'hypothèse qu'un caractère a une proportion p dans une population.
Pour rejeter ou non cette hypothèse au seuil de 5%, on compare la proportion de ce caractère dans un échantillon avec l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une loi binomiale de même taille que l'échantillon.
Soit f la fréquence du caractère dans un échantillon de taille n et I l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% d'une loi binomiale de paramètres n et p.
Si $f \notin$ I, on rejette l'hypothèse au seuil de 5%, sinon on ne rejette pas cette hypothèse.