Nombres complexes
Point de vue géométrique et applications

(Magnard Ch.2 p 42)

I / Le plan complexe.

1°) Représentations graphiques d'un nombre complexe.

Soit P un plan muni d'un repère orthonormal (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$)
À tout nombre complexe z tel que $z = a + i\,b$, avec a et b réels, on peut associer :

- Le point M de coordonnées (a; b)
  M est appelé image de z dans le plan complexe P, z est appelé affixe du point M.
- Le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (a; b)
  $\vec{w}$ est appelé image de z dans le plan complexe P, z est appelé affixe du vecteur $\vec{w}$.

Remarque : L'axe des abscisses est alors aussi appelé : axe des réels.
L'axe des ordonnées est alors aussi appelé : axe des imaginaires purs.

2°) Égalités.

- Deux points A et B d'affixes respectives z_A et z_B sont confondus si et seulement si $z_A = z_B$
- Deux vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ d'affixes respectives z_1 et z_2 sont égaux si et seulement si $z_1 = z_2$

De plus : Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a alors pour affixe : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

3°) Norme et distance.

Soit deux points distincts A et B d'affixes respectives z_A et z_B, on a alors :

- $AB = |\, z_B - z_A \,|$
- $\| \overrightarrow{AB} \| = |\, z_{\overrightarrow{AB}} \,|$

4°) Milieu d'un segment et centre de gravité d'un triangle.

- Soit deux points distincts A et B d'affixes respectives z_A et z_B.
  Le milieu du segment [AB] est le point I d'affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
- Soit un troisième point C d'affixe z_C, non aligné avec A et B.
  Le centre de gravité du triangle ABC est le point G d'affixe $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

5°) Opérations

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ d'affixes respectives z_1 et z_2, alors :

- Le vecteur $-\overrightarrow{w_1}$ a pour affixe : $-z_1$
- Le vecteur $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ a pour affixe : $z_1 + z_2$
- Le vecteur $\overrightarrow{w_1} - \overrightarrow{w_2}$ a pour affixe : $z_1 - z_2$
- Pour tout réel k, le vecteur $k\,\overrightarrow{w_1}$ a pour affixe : $k\,z_1$

6°) Symétries.

Soit M un point d'affixe z, alors :

- Le point M_1 d'affixe $-z$ est le symétrique de M par rapport à l'origine du repère.
- Le point M_2 d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

7°) Exercice classique.

Soit deux points distincts A et B d'affixes respectives a et b.
À tout point M d'affixe $z \neq b$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z - a}{z - b}$
Quel est l'ensemble des points M tels que M' soit sur un cercle de centre O ?

II / Argument et forme trigonométrique d'un nombre complexe.

1°) Coordonnées polaires.

Soit *P* un plan muni d'un repère orthonormal (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$).
Tout point M du plan, distinct de l'origine, peut être repéré de manière unique par :

- Sa distance à l'origine : OM
- Une mesure de l'angle orienté ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OM}$) défini modulo 2π

Remarque : C'est ce que l'on retrouve sur radars aériens ou maritimes.

Propriété : Soit M(x; y) un point du plan *P*, distinct de O, si on note ρ = OM et θ = ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OM}$) [2π],
on a alors : $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ x = \rho\sin(\theta) \end{cases}$ et $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

2°) Argument d'un nombre complexe.

Tout nombre complexe non nul z admet un argument θ défini modulo 2π par :
θ = ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OM}$) [2π], où M est l'image de z dans le plan complexe (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Remarque : On note alors arg(z) = θ [2π] ou arg(z) = θ + 2kπ, $k \in \mathbf{Z}$.

3°) Égalité de deux nombres complexes.

Soit z et z' deux complexes non nuls, on a alors :
$z = z'$ si et seulement si : $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$

4°) Propriétés algébriques des arguments

Soit z un complexe quelconque, on a alors :

- $z \in \mathbf{R}$ si et seulement si : z = 0 ou arg(z) = 0 [π]
  et plus précisément :
  - $z \in \mathbf{R}^*_+$ si et seulement si : arg(z) = 0 [2π]
  - $z \in \mathbf{R}^*_-$ si et seulement si : arg(z) = π [2π]
- $z \in i\mathbf{R}$ si et seulement si : z = 0 ou arg(z) = $\frac{\pi}{2}$ [π]
  et plus précisément :
  - $z \in i\mathbf{R}^*_+$ si et seulement si : arg(z) = $\frac{\pi}{2}$ [2π]
  - $z \in i\mathbf{R}^*_-$ si et seulement si : arg(z) = $-\frac{\pi}{2}$ [2π]

Soit z et z' deux complexes non nuls, on a alors :

- arg(– z) = arg(– z) + π [2π]
- arg($\bar{z}$) = – arg(z) [2π]

5°) Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire : $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où $r = |z|$ et θ = arg(z) [2π]
Cette écriture est alors appelée : forme trigonométrique de z.

6°) Formules de trigonométrie.

Formules d'addition : Pour tous réels a et b on a :

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Formules de duplication : Pour tout réel a on a :

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$
- $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(b)$

7°) Argument et opérations.

Soit z et z' deux complexes non nuls, on a alors :

- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- Pour tout entier naturel n, $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$

8°) Propriétés géométriques des arguments.

Rappel : Soit z un complexe non nul et M son image dans le plan complexe, on a alors :

$\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$.

Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B, alors :

$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$.

Soit A , B, C et D quatre points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, et z_D, alors :

$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\ [2\pi]$.

9°) Exercice classique.

Soit deux points distincts A et B d'affixes respectives a et b.

À tout point M d'affixe $z \neq b$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-a}{z-b}$

Quel est l'ensemble des points M tels que M' soit sur une droite passant par O ?

III / Forme exponentielle d'un nombre complexe.

1°) Équation fonctionnelle.

La fonction f définie de **R** dans **C** par : $f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ possède les propriétés suivantes :

- $f(0) = 1$
- Pour tous réels θ et θ' on a : $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$
- $f' = i f$

Notation : Pour tout réel θ, on note : $f(\theta) = e^{i\theta}$

2°) Forme exponentielle.

Tout nombre complexe z, non nul, peut s'écrire : $z = r\, e^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$.

Cette écriture est appelée : forme exponentielle de z.

3°) Propriétés.

Valeurs particulières :

$e^{i0} = 1$, $e^{2i\pi} = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{-i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Pour tout nombre réel θ, on a : $|e^{i\theta}| = 1$ et $e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta}$, $k \in \mathbf{Z}$

Soit $z = r\, e^{i\theta}$, et $z' = r'\, e^{i\theta'}$, avec r, θ, r', θ' quatre réels tels que $r > 0$ et $r' > 0$:

- $z \times z' = r\, r'\, e^{i(\theta + \theta')}$
- $z^n = r^n\, e^{in\theta}$
- $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'} e^{-i\theta'}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta - \theta')}$

Remarque : Ne pas apprendre par cœur ces formules mais utiliser les propriétés classiques de la fonction exponentielle, c'est-à-dire les propriétés des puissances…

De plus :

- $-z = r\, e^{i(\theta + \pi)}$
- $\bar{z} = r\, e^{-i\theta}$

4°) Formules d'Euler.

Pour tout nombre réel θ, et tout entier naturel n, on a :

- $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\,\theta} + e^{-i\,\theta}}{2}$
- $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\,\theta} - e^{-i\,\theta}}{2i}$

5°) Formule de Moivre.

Pour tout nombre réel θ, et tout entier naturel n, on a :

- $\cos(n\ \theta) + i\ \sin(n\ \theta) = (\cos(\theta) + i\ \sin(\theta))^{n}$

6°) Racines n-ièmes de l'unité.

Soit n un entier naturel non nul.

Définition :

- On appelle racine n-ième de l'unité, tout nombre complexe z tel que : $z^{n} = 1$.

Notation :

- On note U_n l'ensemble de toutes les racines n-ièmes de l'unité.

Propriété :

- Il existe n racines n-ièmes de l'unité différentes : $U_n = \left\{e^{ik\pi}\right\}_{k\in\{0;\,1;\,2;\,\ldots;n\,-1\}}$

Remarque :

- La somme des n racines n-ièmes de l'unité vaut 0.

Géométrie :

- Pour $n > 2$, si on note M_k les points d'affixes $z_k = e^{ik\pi}$ dans le plan complexe, alors $M_0M_1\ldots M_{n-1}$ forme un polygone régulier de centre 0.

Valeurs particulières :

- $n = 1$: $U_1 = \{1\}$
- $n = 2$: $U_2 = \{1\ ;\ -1\}$
- $n = 3$: $U_3 = \{1\ ;\ j\ ;\ \bar{j}\}$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{-1}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $n = 4$: $U_4 = \{1\ ;\ i\ ;\ -1\ ;\ -i\}$

7°) Transformations du plan complexe (Hors programme).

- Réflexion par rapport à l'axe des réels : $z' = \bar{z}$
- Translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe a : $z' = z + a$
- Homothétie de centre Ω d'affixe z_Ω et de rapport k : $z' = k(z - z_\Omega) + z_\Omega$
- Rotation de centre Ω d'affixe z_Ω et d'angle θ : $z' = e^{i\,\theta}(z - z_\Omega) + z_\Omega$
- Similitude directe : $z' = a\,z + b$
- Similitude indirecte : $z' = a\,\bar{z} + b$