Chap 1. Numération

Livre p 241 – Chap 19 Représentation des entiers

1. Les entiers naturels

a. Définition

Soit b un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Tout entier naturel N, peut s'écrire : $N = a_n\, b^{n} + a_{n-1}\, b^{n-1} + \ldots + a_1\, b + a_0$
avec pour tout $i \in \{0; 1; \ldots; n\}$: $0 \leq a_i < b$
On dit alors que l'entier N s'écrit : $a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0$ dans le système de numération à base b.

b. Les entiers en base 10 : Le système décimal

En numération décimale, il y a 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
La position de chaque chiffre correspond à la puissance de 10 qui lui est associée en partant de la droite.
(unités, dizaines, centaines, milliers, …)
Exemple : $2019 = 2 \times 1000 + 0 \times 100 + 1 \times 10 + 9 \times 1 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0$.

c. Les entiers en base 2 : le système binaire

En numération binaire, il n'y a que 2 chiffres : 0 et 1.
La position de chaque chiffre correspond à la puissance de 2 qui lui est associée en partant de la droite.
Exemple :
$11111100011_{b2} = 1{\times}1024 + 1{\times}512 + 1{\times}256 + 1{\times}128 + 1{\times}64 + 1{\times}32 + 0{\times}16 + 0{\times}8 + 0{\times}4 + 1{\times}2 + 1{\times}1$
$11111100011_{b2} = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0{\times}2^4 + 0{\times}2^3 + 0{\times}2^2 + 1{\times}2^1 + 1{\times}2^0$
$11111100011_{b2} = 2019_{b10}$.
(noté aussi : $\overline{11111100011}^2$ ou $(11111100011)_2$ ou 11111100011b ou 0b11111100011)

d. Les entiers en base 16 : le système hexadécimal

En numération hexadécimale, il y a 16 « chiffres » : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
La position de chaque chiffre correspond à la puissance de 16 qui lui est associée en partant de la droite.
Exemple : $7E3_{b16}$ $7{\times}256 + 14{\times}16 + 3{\times}1 = 7 \times 16^2 + 14 \times 16^1 + 3 \times 16^0 = 2019_{b10}$.
(noté aussi : $\overline{7E3}^{16}$ ou $(7E3)_{16}$ ou 7E3h ou 0x7e3)

e. Premières valeurs

	Binaire	Hexa
0	**0**	**0**
1	**1**	**1**
2	**10**	**2**
3	**11**	**3**
4	**100**	**4**
5	**101**	**5**
6	**110**	**6**
7	**111**	**7**
8	**1000**	**8**
9	**1001**	**9**
10	**1010**	**A**
11	**1011**	**B**
12	**1100**	**C**
13	**1101**	**D**
14	**1110**	**E**
15	**1111**	**F**

	Binaire	Hexa
16	**10000**	**10**
17	**10001**	**11**
18	**10010**	**12**
19	**10011**	**13**
20	**10100**	**14**
21	**10101**	**15**
22	**10110**	**16**
23	**10111**	**17**
24	**11000**	**18**
25	**11001**	**19**
26	**11010**	**1A**
27	**11011**	**1B**
28	**11100**	**1C**
29	**11101**	**1D**
30	**11110**	**1E**
31	**11111**	**1F**

	Binaire	Hexa
32	**100000**	**20**
33	**100001**	**21**
34	**100010**	**22**
35	**100011**	**23**
36	**100100**	**24**
37	**100101**	**25**
38	**100110**	**26**
39	**100111**	**27**
40	**101000**	**28**
41	**101001**	**29**
42	**101010**	**2A**
43	**101011**	**2B**
44	**101100**	**2C**
45	**101101**	**2D**
46	**101110**	**2E**
47	**101111**	**2F**

	Binaire	Hexa
48	**110000**	**30**
49	**110001**	**31**
50	**110010**	**32**
51	**110011**	**33**
52	**110100**	**34**
53	**110101**	**35**
54	**110110**	**36**
55	**110111**	**37**
56	**111000**	**38**
57	**111001**	**39**
58	**111010**	**3A**
59	**111011**	**3B**
60	**111100**	**3C**
61	**111101**	**3D**
62	**111110**	**3E**
63	**111111**	**3F**

2. Les conversions

a. Du binaire ou de l'hexadécimale vers le décimal

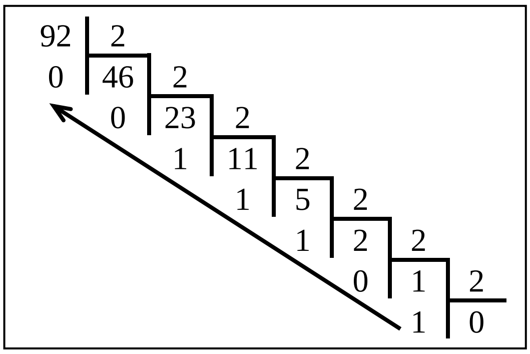
Il suffit simplement d'utiliser la définition et d'additionner !

b. Du décimal vers le binaire ou l'hexadécimale. Méthode 1.

Par soustractions successives : en cherchant à chaque fois quelle est la plus grande puissance de 2 pour le binaire, ou de 16 pour l'hexadécimal, inférieur au résultat.
Exemple : Comment écrire 7 777 en base 16 ?
Calcul des premières puissances de 16 : $16^0 = 1$, $16^1 = 16$, $16^2 = 256$, $16^3 = 4\,096$, $16^4 = 65\,536$
La plus grande puissance de 16 dans 7 777 est 4 096, on peut la retirer 1 fois : $7\,777 - 1\times 4\,096 = 3\,681$.
La plus grande puissance de 16 dans 3 681 est 256, on peut la retirer 14 fois : $3\,681 - 14\times 256 = 97$.
La plus grande puissance de 16 dans 97 est 16, on peut la retirer 6 fois : $97 - 6\times 16 = 1$.
On a donc : $7\,777 = 1\times 16^3 + 14\times 16^2 + 6\times 16^1 + 1\times 16^0 = 1E61_{b16}$.

c. Du décimal vers le binaire ou l'hexadécimale. Méthode 2.

Par divisions euclidiennes successives, en divisant à chaque fois le résultat par 2 pour le binaire, ou par 16 pour l'hexadécimal, puis en remontant tous les restes obtenus
Exemple : Comment écrire 92 en base 2 ?
$92 = 2\times 46 + 0$
$46 = 2\times 23 + 0$
$23 = 2\times 11 + 1$
$11 = 2\times 5 + 1$
$5 = 2\times 2 + 1$
$2 = 2\times 1 + 0$
$1 = 2\times 0 + 1$



Donc : $92 = 2\times(2\times(2\times(2\times(2\times(2\times 1 + 0) + 1) + 1) + 1) + 0) + 0$
$92 = 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0 = 1011100_{b2}$.

d. Du binaire vers l'hexadécimale et réciproquement

Il suffit de connaitre la correspondance binaire $\leftrightarrow$ hexadécimal des 16 premiers entiers et de regrouper les chiffres en binaire 4 par 4 :
Exemples : $1E61_{b16} = 0001\ 1110\ 0110\ 0001_{b2} = 1111001100001_{b2}$.
$1011100_{b2} = 0101\ 1100_{b2} = 5C_{b16}$.

3. Les opérations

a. Addition et soustraction

On procède comme d'habitude de la droite vers la gauche sans oublier les retenues éventuelles.
Le plus simple étant d'écrire la table d'addition dans la base considérée.
Exemples : $111010_{b2} + 110011_{b2} = 1101101_{b2}$ (58 + 51 = 109)
$111010_{b2} - 110011_{b2} = 111_{b2}$ (58 – 51 = 7)
Remarque : Les nombres négatifs seront vus plus tard…

$$\begin{array}{ccccccc} {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & {\scriptstyle 1} & & \\ & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ + & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} \\ & 1 & 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & 0 \\ - & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

b. Multiplication et division

On les pose comme d'habitude, mais certaines de ces opérations sont très simples :
Multiplication par 10 en décimal ou multiplication par 2 en binaire : On ajoute un 0 à droite.
Division entière par 10 en décimal ou division par 2 en binaire : On retire le dernier chiffre à droite.
Exemple : $1011_{b2} \times 101_{b2} = 110111_{b2}$ ($11 \times 5 = 55$)
101100_{b2} divisé par 11_{b2} donne 1110_{b2} reste 10_{b2}
Remarque : Les nombres à virgule seront vus plus tard…

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & \times & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & & 1 & 1 \\ \cline{7-10} 1 & 0 & 1 & & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & & & & & \end{array}$$