

Interrogation de Spécialité Mathématiques (55 min)*(Calculatrice autorisée)*

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A - Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,005, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est 0,6.

On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.

On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.

On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.

On appelle X_n la matrice ligne $X_n = (a_n \quad b_n)$.

L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer a_1 puis b_1 et montrer que $a_2 = 0,993025$ et $b_2 = 0,006975$.
2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = X_n A$.
 A est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
On admet alors que, pour tout entier naturel n , $X_n = X_0 A^n$.

3. On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.

On admet que P est inversible et que

$$P^{-1} = \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1} A P$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $A^n = P D^n P^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel n ,

$$A^n = \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120(1 - 0,395^n) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de a_n en fonction de n .

6. Déterminer la limite de la suite (a_n) . Conclure.

Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est 0,01.

1. Donner, en fonction de a , la matrice de transition M dans le milieu 2.
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2%.

On admet qu'il existe un unique vecteur X , appelé état stationnaire, tel que $X M = X$, et que $X = (0,98 \quad 0,02)$.

Déterminer la valeur de a .