# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

## SESSION décembre 2018

# MATHÉMATIQUES

## Série S

**Durée de l'épreuve : 4 heures** **Coefficient : 7 ou 9**

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices correspondant à sa spécialité.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

**Exercice 1 (5 points)**

***Commun à tous les candidats***

Pour tout réel $a$ strictement positif, on définit sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ la fonction $g_a$ par :

$$g_a(x)=\frac{x^4+2x^3-3ax^2+2}{x^4+1}.$$

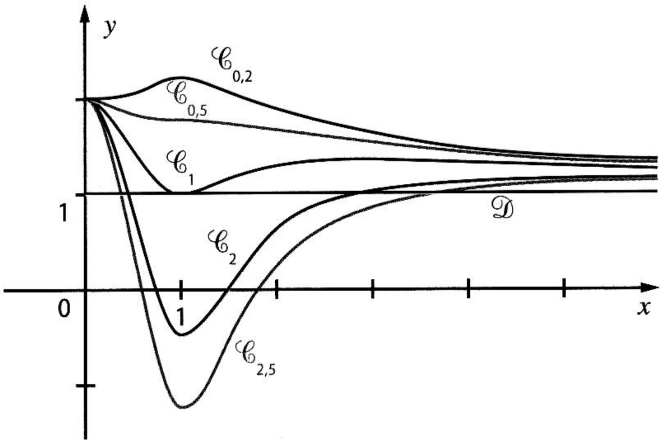
On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de la fonction $g_a$ dans un repère du plan.

Partie A –

1) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 1$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_a$.

2) On a construit dans le repère ci-contre les courbes $\mathcal{C}_{0,2}$, $\mathcal{C}_{0,5}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_{2,5}$ et la droite $\mathcal{D}$.

   Emettre une conjecture sur le nombre de point(s) d'intersection de $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{D}$ selon les valeurs du réel $a$.




Partie B – On considère la fonction $h_a$ définie sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ par $h_a(x)=2x^3-3ax^2+1$.

1) Justifier que $x$ est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{D}$ si, et seulement si, $h_a(x)=0$.

2) Justifier toutes les données figurant dans le tableau de variation de la fonction $h_a$ donné ci-dessous.

| $x$ | $0$ | $a$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h_a(x)$ | $1$ ↘ | $-a^3+1$ | ↗ $+\infty$ |

3) Dans cette question, on suppose que $a = 2$.
   a. Démontrer que l'équation $h_2(x)=0$ admet exactement deux solutions.
   b. En déduire le nombre de point(s) d'intersection de $\mathcal{C}_2$ et de $\mathcal{D}$.

4) Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.
   a. Déterminer le minimum de la fonction $h_{0,5}$ sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
   b. Que peut-on en déduire concernant l'intersection de $\mathcal{C}_{0,5}$ et de $\mathcal{D}$ ?

5) Déterminer selon les valeurs du réel $a$, le nombre de point(s) d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_a$ et de la droite $\mathcal{D}$.

**Exercice 2 (5 points)**

***Commun à tous les candidats***

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique le centimètre.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(z^2 - 2z + 4\right)\left(z^2 + 4\right) = 0$.

2) On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 2i$.
   a. Ecrire $z_A$ et $z_B$ sous forme exponentielle et justifier que les points A et B sont sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   b. Faire une figure et placer les points A et B.
   c. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$.

3) On note F le point d'affixe $z_F = z_A + z_B$.
   a. Placer le point F sur la figure précédente. Montrer que OAFB est un losange.
   b. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OF}\right)$, puis de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OF}\right)$.
   c. Calculer le module de $z_F$ et en déduire l'écriture de $z_F$ sous forme trigonométrique.
   d. En déduire la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right).$$

4) Deux modèles de calculatrice de marques différentes donnent pour l'une :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2},$$

   et pour l'autre :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

   Ces résultats sont-ils contradictoires ? Justifier la réponse.

**Exercice 3 (5 points)**

***Commun à tous les candidats***

**Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.**

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :
M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
T l'évènement : « le test est positif ».

1) Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2) Un animal est choisi au hasard.
a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3) Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif.
Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4) On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note $X$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
a. Quelle est la loi de probabilité suivie par $X$ ? (Justifier)
On donnera aussi l'expression de $P(X = k)$ en fonction de $k$ en précisant les valeurs prises par $k$.
b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

5) Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 € et le coût d'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est 1000 €.
On suppose que le test est gratuit. D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

| Coût | 0 | 100 | 1000 |
|---|---|---|---|
| Probabilté | 0,9405 | 0,058 | 0,0015 |

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

**Exercice 4 (5 points)**

***Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.***

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$.

Soit $a$ un réel positif.
On définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1) A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, pour $a = 2{,}9$ puis pour $a = 3{,}1$.

2) Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $\ell$.
   a. En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^{\ 2} - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.
   b. Montrer que les valeurs possibles de $\ell$ sont 1 et 3.

3) Dans cette question, on prend $a = 2{,}9$.
   a. Montrer que $f$ est croissante sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty[$.
   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   c. Montrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

4) Dans cette question, on prend $a = 3{,}1$ et on admet que la suite $(u_n)$ est croissante.
   a. A l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)$ n'est pas majorée.
   b. En déduire le comportement de la suite $(u_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
   c. L'algorithme suivant calcule le plus petit rang $p$ pour lequel $u_p > 10^6$.
   Recopier et compléter cet algorithme.
   $P$ est un nombre entier et $U$ est un nombre réel.

```
P ← 0
U …………
Tant que ……………
      P ← …………
      U ← …………
Fin Tant que
```

**Exercice 4 (5 points)**

***Candidats suivant l'enseignement de <u>spécialité mathématiques</u>.***

Soit la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et , pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
On admet que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est un entier.

1) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n$ et $u_{n+1}$ sont premiers entre eux.

2) Démontrer que les termes de la suite $(u_n)$ sont alternativement pairs et impairs.

3) L'affirmation suivante est-elle vraie ? Justifier.
   Affirmation : « Si $p$ est un nombre premier impair, alors $u_p$ est premier.»

4) a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $2u_n = 3^n - 1$.

   b. Déterminer le plus petit entier naturel non nul $n$ tel que $3^n$ est congru à 1 modulo 7.

   c. En déduire que $u_{2022}$ est divisible par 7.

5) a. Calculer le reste de la division euclidienne par 5 de chacun des cinq premiers termes de la suite $(u_n)$.

   b. Sans justification, recopier et compléter le tableau suivant :

| Reste de la division euclidienne de $m$ par 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Reste de la division euclidienne de $3m+1$ par 5 | | | | | |

   c. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, si $u_n$ est congru à 4 modulo 5, alors $u_{n+4}$ est congru à 4 modulo 5.

   d. Existe-t-il un entier naturel n tel que le reste de la division euclidienne de $u_n$ par 5 soit égal à 2 ?