Jeudi 14 novembre 2013 Term S

Interrogation de Spécialité Mathématiques (1h)

(Calculatrice interdite)

Exercice 1 *(4 points)*

Soient a, b, c, d trois entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

1°) Démontrer la propriété du cours suivante :
Si $a \equiv b$ $[n]$ et $c \equiv d$ $[n]$ alors $ac \equiv bd$ $[n]$.

2°) En déduire la démonstration de la propriété du cours suivante :
Pour tout entier naturel p, si $a \equiv b$ $[n]$ alors $a^p \equiv b^p$ $[n]$.

Exercice 2 *(3 points)*

Soit m et n deux entiers naturels. Le reste de la division euclidienne de m par 15 est 9, et le reste de la division euclidienne de n par 15 est 12.

Déterminer le reste de la division euclidienne de a, b et c par 15, où : $a = m + n$, $b = mn$ et $c = m^2$.

Exercice 3 *(7 points)*

1°) Montrer que : pour tout entier naturel n, le nombre $2^{2n} + 2$ est divisible par 3.

2°) Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne par 3 du carré d'un entier ?

3°) En déduire que pour tout entier naturel n, le nombre $n^2 + 1$ n'est jamais divisible par 3.

4°) Les mesures des longueurs des côtés d'un triangle rectangle sont trois entiers a, b, c.
En utilisant le résultat du 2°), démontrer que la mesure de la longueur d'au moins un des deux côtés de l'angle droit est un multiple de 3.

Exercice 4 *(6 points)*

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Une réponse correcte rapporte +0,5 point, une mauvaise réponse pénalise –0,5 point, une absence de réponse de rapporte aucun point.

Dans toute les affirmations suivantes, a, b, c et n désignent des entiers naturels non nuls.

1. Si a divise b et a divise c alors : a divise $b + c$.	
2. Si a divise $b + c$, alors : a divise b et a divise c.	
3. Si a divise b alors : a^2 divise b^2.	
4. Si a^2 divise b^2 alors : a divise b.	
5. Si n est impair alors : $n^2 - 1$ est divisible par 8.	
6. Si $n^2 - 1$ est divisible par 8 alors : n est impair.	
7. Si $a \equiv b$ $[n]$ alors : b est le reste de la division euclidienne de a par n.	
8. Si b est le reste de la division euclidienne de a par n alors : $a \equiv b$ $[n]$.	
9. Si $a \equiv b$ $[n]$ alors : $(a - b)$ est un multiple de n.	
10. Si $(a - b)$ est un multiple de n alors : $a \equiv b$ $[n]$.	
11. Si $a \equiv b$ $[n]$ alors : $ac \equiv bc$ $[n]$.	
12. Si $ac \equiv bc$ $[n]$ alors : $a \equiv b$ $[n]$.	