BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION avril 2014

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

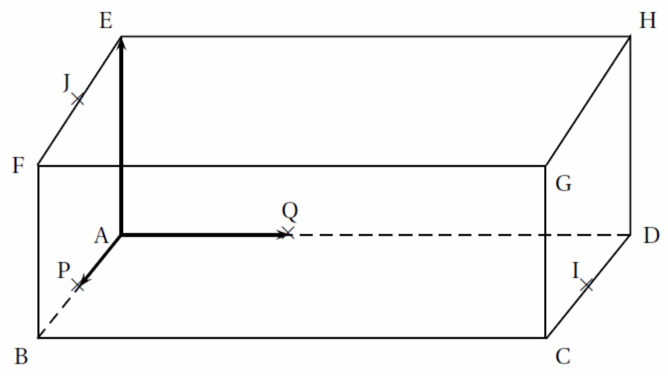
Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].

On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).

L'espace est rapporté au repère orthonormal (A ; $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE}$).

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].

3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment [IJ].

4. **a.** Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b. Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbf{R}.$$

c. Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega A = \Omega I$.

d. Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera SUR la copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). Soit z un nombre complexe de la forme $x + iy$, où x et y sont des réels.

1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1 + i)^4$. L'écriture exponentielle de z est :

a. $\sqrt{2}e^{i\pi}$
b. $4e^{i\pi}$
c. $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
d. $4e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z = x + iy$ tels que $|z - 1 + i| = |\sqrt{3} - i|$ a pour équation :

a. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$.
b. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.
c. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.
d. $y = x + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

3. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par :
$Z_0 = 1 + i$ et $Z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n.

a. Pour tout entier naturel n, le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.
b. Pour tout entier naturel n, le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.
c. La suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.
d. Pour tout entier naturel n, un argument de $\dfrac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_n}$ est $\dfrac{\pi}{2}$.

4. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives :
$Z_A = -1 - i$; $Z_B = 2 - 2i$ et $Z_C = 1 + 5i$.
On pose $Z = \dfrac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

a. Z est un nombre réel.
b. Le triangle ABC est isocèle en A.
c. Le triangle ABC est rectangle en A.
d. Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment [BC].

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\,(1 - \ln x)$.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

Partie 1 : Étude de la fonction *f*

1. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a.

a. Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A′, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.

b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $A(a)$ la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = e$.

1. Justifier que $A(a) = \int_a^e f(x)dx$, en distinguant le cas $a < e$ et le cas $a > e$.

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x^2\,(b \ln x + c)$

a. Déterminer les réels b et c tels que g soit une primitive de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Calculer $A(a)$ en fonction de a.

Exercice 4 (5 points)

Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

En déduire la limite de la suite (u_n).

2. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).
b. Calculer S_n en fonction de n.
c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

3. On souhaite calculer une valeur approchée de S_{10}, pour cela on a entré l'algorithme suivant dans le logiciel AlgoBox :

```
Code de l'algorithme
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE U
  LIRE N
  S PREND_LA_VALEUR U
  POUR I ALLANT_DE 1 A N
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR U/5+4/5
    S PREND_LA_VALEUR S+U
    FIN_POUR
  AFFICHER U
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

a. Que doit entrer l'utilisateur quand le logiciel lui demande :

```
Console
***Algorithme lancé***
Entrer U :
Entrer N :
```

b. Qu'est-il affiché à l'écran à la fin de l'exécution de celui-ci ?

PARTIE B :

Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.
Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.
Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Exercice 4 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de <u>spécialité mathématiques</u>.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. **a.** Vérifier que le couple (4 ;6) est une solution de l'équation : (E) $11x - 5y = 14$.

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs (x ; y) vérifiant l'équation (E).

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$.

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2011^{2012} par 7.

3. Soient a et b deux nombres réels, M la matrice de $M_2(\mathbf{R})$: $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix}$

a. Calculer $\mathrm{M}^2 - (a+b)\mathrm{M}$ en fonction de I_2, matrice identité de $M_2(\mathbf{R})$.

b. En déduire les matrices M telles que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$.

4. On considère l'algorithme suivant où $\mathrm{Ent}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}$.

A et N sont des entiers naturels
Saisir A
N prend la valeur 1
Tant que $\mathrm{N} \leq \sqrt{\mathrm{A}}$
    Si $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}} - \mathrm{Ent}\left(\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}\right) = 0$ alors Afficher N et $\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{N}}$
    Fin Si
N prend la valeur N + 1
Fin Tant que

Quels résultats affiche cet algorithme pour A = 12 ?
Que donne cet algorithme en général ?

ANNEXE (Exercice 3)
(à rendre avec la copie)