TS$_2$ **01/04/2014**

D.S.T. de Mathématiques
(1h50min – Calculatrice autorisée)

Exercice I (10 pts)

Les parties A et B sont indépendantes.

Un site internet propose des jeux en ligne.

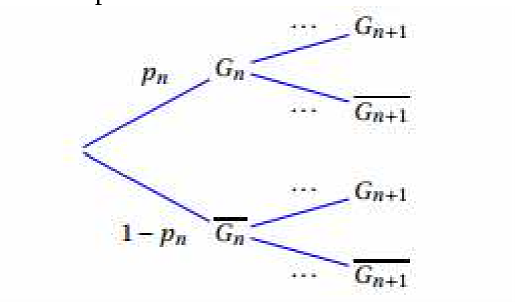
Partie A :

Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $^2/_5$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $^4/_5$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.
L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$
   a. Montrer que $(u_n)_{n\in N^*}$ est une suite géométrique de raison $^1/_5$ et de premier terme u_1 à préciser.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.
   c. Déterminer la limite de p_n.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.
On suppose que toutes les parties sont indépendantes.
La probabilité de gagner à chaque partie est égale à $^1/_4$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
   b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.
   c. Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.
   a. Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.
   b. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 €.
   Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

<u>Exercice II (10 pts)</u>

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

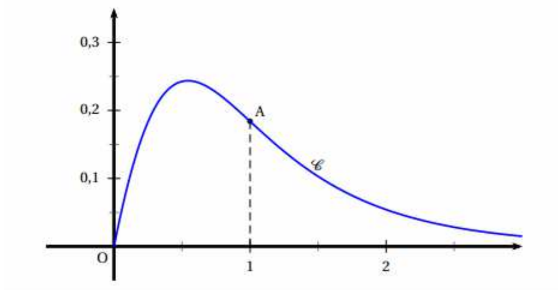
Partie A

La courbe C ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction *f* dérivable sur [0 ; +∞[, de fonction dérivée *f'* continue sur [0 ; +∞[.

La courbe C passe par les points O et A$\left(1;\ \frac{1}{2e}\right)$ et, sur l'intervalle [0 ; 1], elle est au-dessus du segment [OA].

1. Montrer que : $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2e}$.

2. Montrer que : $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{4e}$.



Partie B

On sait désormais que la fonction *f* considérée dans la partie A est définie sur [0 ; +∞[par :

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de *f* en +∞. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. On considère la fonction *g* définie sur [0 ; +∞[par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
   Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle.

3. a. Montrer que, pour tout *x* de [0 ; +∞[, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
   b. En déduire les variations de *f* sur [0 ; +∞[.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel *n* par : $u_n = \int_n^{2n} f(x)\mathrm{d}x$.
   a. Montrer que, pour tout *x* de [0 ; +∞[, $0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\left(e^{-n} - e^{-2n}\right)$.
   c. En déduire la limite de u_n quand *n* tend vers +∞.