Mardi 11 février 2014 T°S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(8 points)*

Dans cet exercice, les résultats approchés seront donnés à 0,0001 près.

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :
M l'évènement : « l'animal est porteur de la maladie » ;
T l'évènement : « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.
a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?
b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?
On donnera aussi l'expression de $P(X = k)$ en fonction de k en précisant les valeurs prises par k.
b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif ?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 €.
On suppose que le test est gratuit.
D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,940 5	0,058 0	0,001 5

a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.
b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager ?

…/…

<u>Exercice 2</u> *(12 points)*

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$ par

$f(x) = 1 + \ln(1 + x)$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthononnal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$.

On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. a. Étudier le sens de variation de la fonction f.
b. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
a. Déterminer $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$.
b. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$
c. Étudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser le tableau de variations de la fonction g.
d. Montrer que sur l'intervalle $]-1\ ;+\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β, avec α négative et β appartenant à l'intervalle $[2\ ;3]$.
e. À l'aide des questions précédentes, déterminer le signe de $g(x)$. En déduire la position relative de la courbe C_f et de la droite D.

3. Voici un algorithme :
a. Expliquer à quoi sert cet algorithme.
b. Détailler précisément le rôle des lignes

« b PREND_LA_VALEUR x »

« a PREND_LA_VALEUR x »

figurant dans le test

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  a PREND_LA_VALEUR 2
  b PREND_LA_VALEUR 3
  TANT_QUE (b-a > 0.001) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    x PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
    y PREND_LA_VALEUR 1+ln(1+x)-x
    SI (y<0) ALORS
      DEBUT_SI
      b PREND_LA_VALEUR x
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        a PREND_LA_VALEUR x
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $2 \le u_n \le \beta$.

2. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.