Vendredi 17 janvier 2014 T°$S_{3\text{-}4}$

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(9 points)*

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$), d'unité 1 cm, on considère la suite de points A_n d'affixes a_n, $n \in \mathbf{N}$ telle que :

$$a_0 = 8 \quad \text{et pour tout } n \in \mathbf{N} : \ a_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} a_n .$$

1°) a) Calculer a_1, a_2 et a_3.

b) Placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans un repère.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_n = 2^{3-n} e^{i\frac{n\pi}{3}}$.

2°) Pour tout entier naturel n, on pose $r_n = |a_n|$.

a) Démontrer que la suite (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
b) En déduire le comportement de la suite (r_n) à l'infini.
c) Interpréter graphiquement ce résultat.

3°) Pour tout entier naturel n, on pose $l_n = |a_{n+1} - a_n|$.

a) Calculer l_0 et l_1.
b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $l_n = 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
c) En déduire la nature de la suite (l_n).

4°) Pour tout entier naturel n, on pose $L_n = l_0 + l_1 + \ldots + l_{n-1}$.

a) Déterminer une expression de L_n en fonction de n.
b) Quelle est la limite de la longueur de la ligne polygonale $A_0A_1\ldots A_n$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 2 *(11 points)*

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation (E) : $e^x = {}^1/_x$ admet une unique solution sur **R** et de déterminer une valeur approchée la plus précise possible de cette solution.

Partie A. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1°) Démontrer que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

2°) a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Etudier le sens de variation de la fonction f sur **R**.

3°) a) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur **R**, notée α et que α appartient à l'intervalle [½ ; 1].

b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

c) Etudier le signe de f sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

Partie B. Seconde approche

On note g la fonction définie sur [0 ; 1] par : $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

2°) Montrer que g est croissante sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

Partie C. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considère la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$

1°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

2°) En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel l.

On admettra que $l = \alpha$.

3°) Déterminer une valeur approchée de u_3 à 10^{-3} près.