BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION décembre 2013

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n.

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \qquad \text{et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier
	U, V, M sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K + 1$ à K
	Affecter U à M
	Affecter $\frac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\frac{M+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$.
Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	M	U	V
0			
1			
2			

Partie B

1°) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2°) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) Déduire des résultats des questions 1.b. et 2.a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3°) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4°) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.

En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$).
On note **C** l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1°) Proposition : Pour tout entier naturel n : $(1 + i)^{4n} = (-4)^n$.

2°) Soit (E) l'équation $(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$ où z désigne un nombre complexe.
Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions dans C de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3°) Soit z un complexe non nul et z' le nombre complexe égal à : $z' = 1 - \frac{i}{z}$.

Proposition : Les points dont les affixes z sont telles que z' soit un nombre imaginaire pur forment une droite privée de l'origine du repère.

4°) Soit A le point d'affixe $z_A = \frac{1}{2}(1 + i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Proposition : Si $n - 1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5°) Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Proposition : $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = (x^3 - 1)\sqrt{x^2+1}$.

1°) Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-5 \leq x \leq 5$, $-4 \leq y \leq 4$.
Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur la copie.

2°) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3°) On se propose maintenant d'étudier plus précisément la fonction f.

a) Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et en déduire que le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - x$.
b) Soit $Q(x) = 4x^3 + 3x - 1$, étudier les variations de Q sur **R** et démontrer que l'équation $Q(x) = 0$ admet une unique solution α sur **R** dont on donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
c) En déduire le signe de $Q(x)$ puis le signe de $f'(x)$.
d) Dresser le tableau de variations de f sur **R**.

4°) On veut représenter sur l'écran de la calculatrice les informations trouvées dans le 3°), quels intervalles choisir pour la fenêtre de la calculatrice ? On donnera un intervalle d'amplitude 0,5 en abscisse et d'amplitude 0,02 en ordonnée.

Exercice 4 (5 points)

Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = 2\sin^2(x)\cos(2x)$.

1°) Etudier la parité de f.

2°) Montrer que π est une période de f.

3°) Expliquer comment obtenir la courbe (C_f) représentative de f sur **R** à partir de la courbe représentative de f tracée sur l'intervalle $[0 ; \pi/2]$.

4°) a) Montrer que l'on peut écrire : $f'(x) = 4\sin(x)\cos(3x)$.
b) Résoudre l'équation : $\cos(3x) = 0$ sur **R** puis sur $[0 ; \pi/2]$.
c) En déduire le signe de $f'(x)$ en fonction de x sur $[0 ; \pi/2]$.

5°) Ecrire les variations de f sur $[0 ; \pi/2]$ et dresser son tableau de variations sur cet intervalle.

6°) Tracer la courbe (C_f) sur $[0 ; \pi/2]$, puis la compléter à l'intervalle $[-\pi ; \pi]$. (unité : 2 cm)

Exercice 4 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de <u>spécialité mathématiques</u>.

On note E l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26.
On note A l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté « * » considéré comme un caractère.

Pour coder les éléments de A, on procède de la façon suivante :

• **Premièrement** : On associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant.
On a donc $a \to 0$, $b \to 1$, … $z \to 25$.
On associe au séparateur « * » le nombre 26.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

o	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*	*
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

On dit que a a pour rang 0, b a pour rang 1, …, z a pour rang 25 et le séparateur « * » a pour rang 26

• **Deuxièmement** : à chaque élément x de E, l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x + 3$ par 27.
On remarquera que pour tout x de E, $g(x)$ appartient à E.

• **Troisièmement** : Le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$.
Exemple :
$s \to 18$, $g(18) = 21$ et $21 \to v$. Donc la lettre s est remplacée lors du codage par la lettre v.

1°) Trouver tous les entiers x de E tels que $g(x) = x$ c'est-à-dire invariants par g.
En déduire les caractères invariants dans ce codage.

2°) Démontrer que, pour tout entier naturel x appartenant à E et tout entier naturel y appartenant à E, si $y \equiv 4x + 3$ modulo 27 alors $x \equiv 7y + 6$ modulo 27.
En déduire que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

3°) Proposer une méthode de décodage.

4°) Décoder le mot « $v\ f\ v$ ».