Mardi 12 novembre 2013 T°S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(12 points)*

Dans le plan complexe (*P*) muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, d'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = -i$, $z_B = 3$, $z_C = 2 + 3i$ et $z_D = -1 + 2i$.

1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.

2. a. Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe : $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

b. Calculer le complexe : $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?

3. a. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.
b. Calculer l'aire a_0 du quadrilatère ABCD.

4. a. Placer sur la figure précédente les points A_1, B_1, C_1 et D_1 tels que $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{B_1C}$, où les points A_1 et B_1 appartiennent à [DC], le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ étant un carré situé à l'extérieur du quadrilatère ABCD.
b. Tracer le carré $A_1B_1C_1D_1$ et déterminer son aire a_1.

5. a. On continue par le même procédé : un carré $A_nB_nC_nD_n$ étant déterminé, on considère les points A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} et D_{n+1} tels que $\overrightarrow{D_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_{n+1}B_{n+1}} = \overrightarrow{B_{n+1}C_n}$, où les points A_{n+1} et B_{n+1} appartiennent à $[D_nC_n]$, le quadrilatère $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du quadrilatère $A_nB_nC_nD_n$.
Tracer le carré $A_2B_2C_2D_2$.
b. Soit a_n l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$.
Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire a_n en fonction de n.
c. Déterminer, en fonction de n, l'aire S_n de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère ABCD et des carrés $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, … et $A_nB_nC_nD_n$.
d. La suite (S_n) est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

Exercice 2 *(8 points)*

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbf{R}\backslash\{4\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 14}{x - 4}$.

On note (*C*) sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer les réels *a*, *b* et *c* tels que, pour tout *x* de $\mathbf{R}\backslash\{4\}$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-4}$.

2. Etudier les limites de la fonction *f* aux bornes de son ensemble de définition.

3. En déduire l'existence d'une asymptote verticale (Δ_1) à la courbe (*C*) et donner son équation.

4. Etudier les variations de la fonction *f*.

5. On pose $d(x) = f(x) - (x - 3)$
a. Etudier la limite de $d(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
b. Etudier la position relative de (*C*) et de la droite (Δ_2) d'équation $y = x - 3$.

6. Dans un repère, tracer les droites (Δ_1) et (Δ_2), puis la courbe (*C*).