TS$_4$ **15/10/2013**

D.S.T. de Mathématiques
(1h50min – Calculatrice autorisée)

Exercice I : Q.C.M. (4 pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Justifier chaque réponse.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1) Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :
   a) 3 b) i c) $3 + i$

2) z est un nombre complexe, $|z + i|$ est égale à :
   a) $|z| + 1$ b) $|z - 1|$ c) $|i\bar{z} + 1|$

3) n est un entier naturel. Le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si et seulement si :
   a) $n = 4$ b) $n = 6k + 3$, $k \in \mathbf{Z}$ c) $n = 6k$, $k \in \mathbf{Z}$

4) A et B sont deux points d'affixes respective i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - i| = |z + 1|$ est :
   a) la droite (AB)
   b) le cercle de diamètre [AB]
   c) la droite perpendiculaire à [AB] passant par O.

Exercice II (6pts)

1) Résoudre dans **C** l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D où $z_A = 1 + 2i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 1 + \sqrt{3} + i$ et $z_D = \overline{z_C}$.
   a) Placer les points A et B dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$.
   b) Calculer $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ et donner le résultat sous forme algébrique.
   c) En déduire la nature du triangle ABC.

3) Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle Γ dont on déterminera le centre et le rayon.

4) Construire les points C et D dans le repère $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$. Expliquer la construction.

Exercice III (10 pts)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur **N** par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur **N** par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (T_n).