T°S$_4$

D.S.T. de Mathématiques
(1h50min – Calculatrice autorisée)

Exercice I (6 pts)

Le 1er janvier 2012, Jean ouvre un compte en banque et dépose 150 €.
Il décide de verser 150 € tous les 1er du mois.
Son compte est rémunéré à 0,2 % par mois et on calcule les intérêts tous les mois.
On note u_0 le montant sur son compte le 1er janvier 2012 et u_n le montant dont il dispose le 1er du n-ième mois suivant janvier 2012.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3 au centime près.
2) Montrer que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 1{,}002\, u_n + 150$.
3) Soit α un réel et (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \alpha$.
   Déterminer la valeur de α pour que la suite (v_n) soit géométrique.
4) On pose : $\alpha = 75\,000$.
   Donner l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
5) De quelle somme disposera Jean le 1er janvier 2013 ?
6) Au bout de combien de temps Jean aura-t-il multiplié par 10 la somme initiale ?

Exercice – Liban 2013.

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$

Partie A.

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
 	
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
  Fin pour
Afficher v
 	
Fin algorithme
	Variables :
	v est un réel
	i et n sont des entiers naturels
	
	Début de l'algorithme :
	Lire n
	Pour i variant de 1 à n faire
	  v prend la valeur 1
	  Afficher v
	  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
	Fin pour
	
	Fin algorithme
		Variables :
		v est un réel
		i et n sont des entiers naturels
		
		Début de l'algorithme :
		Lire n
		v prend la valeur 1
		Pour i variant de 1 à n faire
		  Afficher v
		  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Afficher v
		
		Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714	2,739

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

La suite (v_n) est-elle monotone ?

Partie B.

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3. Quelle est la limite de la suite (v_n).

<u>Exercice III (6 pts)</u>

1) On pose : $z = 3 - 2i$ et $z' = 2i$. Ecrire les nombres suivants sous forme algébrique.
   a) $z_1 = 2z - z'$.

   b) $z_2 = z^2 + z'^2$.

   c) $z_3 = \dfrac{2-z}{1-z'}$

2) Résoudre dans **C** les équations suivantes.
   a) $(2 + i)z + 4 - i = 0$.

   b) $z + 2\bar{z} = 6 + i$.