

Devoir (1h50)
(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (4,5 points)

1°) Soit u une suite arithmétique telle que $u_8 = 50$ et $u_{12} = 26$.
Déterminer, **en justifiant**, le premier terme u_0 et la raison r de la suite u .

2°) Calculer, **en utilisant une formule du cours**, la somme suivante :
 $S = 8 + 12 + 16 + 20 + \dots + 196 + 200$.

3°) Soit v une suite géométrique telle que $v_4 = 36$ et $v_6 = 81$.
Déterminer, **en justifiant**, le premier terme v_0 et la raison q de la suite v .

4°) Calculer, **en utilisant une formule du cours**, la somme suivante :
 $S = 3 - 6 + 12 - 24 + \dots - 3 \times 2^{11} + 3 \times 2^{12}$.

Exercice 2 (3 points)

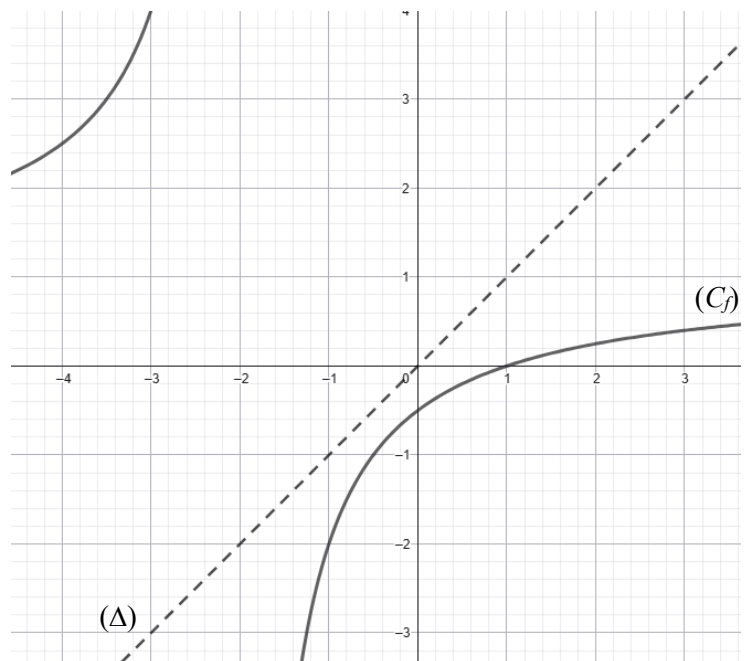
Soit u la suite définie par :
 $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

La courbe (C_f) est tracée ici,
ainsi que la droite $(\Delta) : y = x$.

1°) Expliquer en détail la méthode permettant d'obtenir les points A_1, A_2 et A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses à partir du point $A_0(u_0; 0)$ et des courbes (C_f) et (Δ) .

2°) Réaliser cette construction sur le graphique ci-contre.
(Laisser les traits de construction)

3°) La fonction f a pour équation : $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.
En déduire les valeurs exactes de u_2 et u_3 .



Exercice 3 (4 points)

Déterminer, **en justifiant**, les limites en $+\infty$ des suites suivantes :

1°) u définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \right) (2 - n^2)$

2°) u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = e^{-n} + e^n - 1$

3°) u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{n^2 - 2n + 4}{3n^3 + n^2 - 1}$

4°) u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{n^2 + 4\sqrt{n} - 5}{2n^2 + n + 2}$

Exercice 4 (8,5 points)

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$$

1. Calculer w_0 .
2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
3. Pour tout entier naturel n , exprimer w_n en fonction de n .
4. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$$

5. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.
3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.
Déterminer la limite de la suite (u_n) .