

Devoir (1h50)
(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (6 points)

1°) Le menu d'un restaurant propose : 4 choix pour l'entrée, 6 choix pour le plat et 5 choix pour le dessert.

- a) Alice souhaite prendre un repas avec entrée + plat + dessert, combien a-t-elle de choix différents possibles pour son repas ?
- b) Bob hésite entre un repas avec entrée + plat ou avec plat + dessert, combien a-t-il de choix différents possibles pour son repas ?

2°) 15 chevaux sont au départ de la course du jour à l'hippodrome de Saint Cloud.

- a) Carole souhaite faire un pari sur le quinté (5 premiers chevaux trouvés dans l'ordre), combien a-t-elle de quintés différents possibles pour son pari ?
- b) Denis souhaite faire un pari sur le trio (3 premiers chevaux trouvés sans ordre précis), combien a-t-il de trios différents possibles pour son pari ?

3°) Un jeu de 52 cartes comporte exactement 12 figures (valet, dame, roi).

- a) Etienne tire 5 cartes au hasard, sans ordre précis, combien a-t-il de tirages différents comportant exactement 3 figures ?
- b) Fabienne tire 5 cartes au hasard, sans ordre précis, combien a-t-elle de tirages différents comportant au moins 3 figures ?

Exercice 2 (3 points)

1°) Déterminer la valeur de $9 \times \binom{8}{3}$ en détaillant les calculs, sans utiliser de factorielle.

2°) Déterminer la valeur de $4 \times \binom{9}{4}$ en détaillant les calculs, en utilisant des factorielles.

3°) Démontrer que pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel p tel que $p \leq n$, on a :

$$(n + 1) \times \binom{n}{p} = (p + 1) \times \binom{n + 1}{p + 1}.$$

.../...

Exercice 3 (6 points)

Calculer, en détaillant, les intégrales suivantes :

(On donnera la valeur exacte **et** une valeur approchée à 10^{-3} de chaque résultat)

$$1^{\circ}) I = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^4} \right) dx$$

$$2^{\circ}) J = \int_0^{\ln(2)} e^{2x} (1 - e^{2x})^4 dx$$

$$3^{\circ}) K = \int_0^1 \frac{x^2}{(2 + x^3)^2} dx$$

Exercice 4 (3 points)

En utilisant la méthode d'intégration par parties, calculer l'intégrale suivante :

(On donnera la valeur exacte **et** une valeur approchée à 10^{-3} du résultat)

$$I = \int_1^e (x^3 + 1) \ln(x) dx$$

ATTENTION : Ne traiter qu'un seul des deux exercices suivants !

Exercice 5a (2 points)

Résoudre dans \mathbf{R} puis dans $]-\pi ; \pi]$
l'équation suivante :

$$\sin(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 5b (2 points)

Soit n un entier naturel non nul.
On lance n fois de suite un dé à 6 faces
(numérotées de 1 à 6) parfaitement équilibré.

Déterminer, en justifiant rigoureusement,
la plus petite valeur de n pour laquelle
la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6
lors de ces n lancers, soit supérieure à 0,999.