Lundi 17 novembre 2025 Term Spé Maths 6

Devoir (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(9 points)*

Partie A

Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x) = x^3 + 3\,x^2 + 6\,x + 6$.

1°) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) Etudier les variations de g sur **R**.

3°) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur **R**.
Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

4°) En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x sur **R**.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^3 + 6x}$.

1°) **Limites**.

a) Déterminer les limites de f en 0.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) En posant $X = -x$, déterminer la limite de f en $-\infty$.

d) En déduire d'éventuelles asymptotes à la courbe (C_f) représentative de f.

2°) **Variations**.

a) Soit f' la fonction dérivée de f sur $\mathbf{R}^*$. Montrer que $f'(x)$ a le signe contraire de $g(x)$ sur $\mathbf{R}^*$.

b) En déduire les variations de f sur $\mathbf{R}^*$.

c) Tracer le tableau de variations complet de f sur $\mathbf{R}^*$.

Exercice 2 *(6 points)*

Soit f la fonction définie sur **R** par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1°) Démontrer que la fonction f est continue sur **R**.

2°) Démontrer que la fonction f est dérivable en -1.

3°) Démontrer que la fonction f n'est pas dérivable en 1.

…/…

<u>Exercice 3</u> *(5 points)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$.
Soit u la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1°) Etude de *f*.

a) Déterminer les variations de f sur $\mathbf{R}$.

b) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbf{R}$.

2°) Etude de *u*.

a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

b) Démontrer que la suite u est convergente.

c) Déterminer la limite de la suite u.