

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL BLANC

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Jeudi 26 mars 2026

Durée de l'épreuve : 4 heures

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.*

Exercice 1 (3,5 points)

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 10$.

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 20 + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Justifier avec soin.

Partie B

Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par
$$\begin{cases} w_0 = 45 \\ w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + \frac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $w_1 = 44,5$.

On souhaite écrire une fonction suite, en langage Python, qui renvoie la valeur du terme w_n pour une valeur de n donnée. On donne ci-dessous une proposition pour cette fonction suite.

```
1 def suite(n) :  
2     U=30  
3     W=45  
4     for i in range (1,n+1) :  
5         U=U/2+10  
6         W=W/2+U/2+7  
7     return W
```

2. L'exécution de `suite(1)` ne renvoie pas le terme w_1 .
Comment modifier la fonction suite afin que l'exécution de `suite(n)` renvoie la valeur du terme w_n ?
3. a) Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel n , on a :
$$w_n = 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 11 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 34 .$$

b) On admet que pour tout entier naturel $n \geq 4$, on a : $0 \leq 10n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{10}{n}$.
Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (w_n) ?

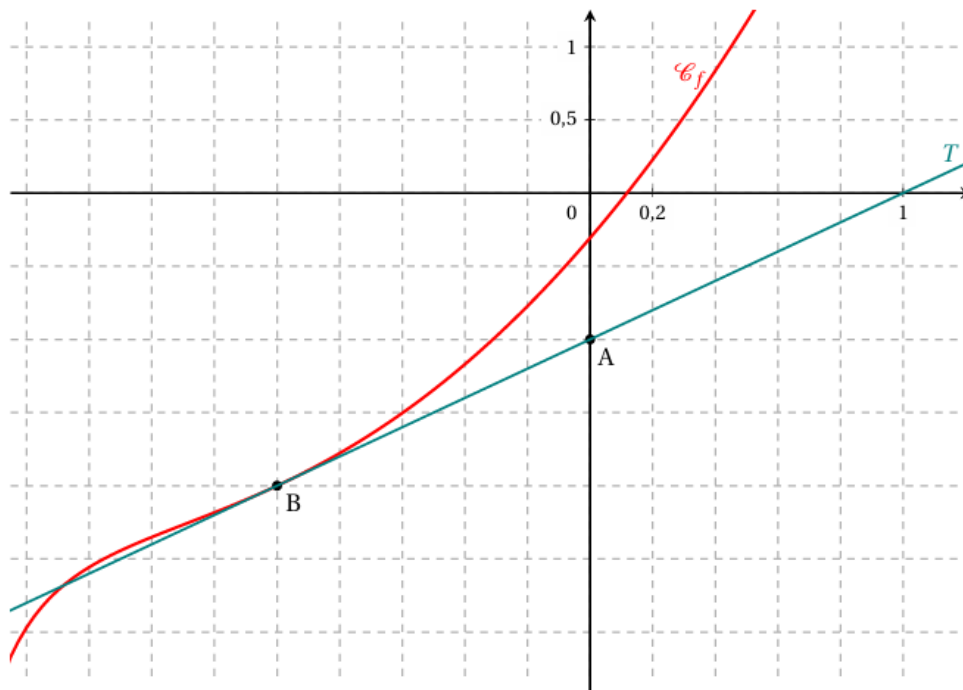
Exercice 2 (6,5 points)

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2; +\infty[$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1 .

On précise que la droite T passe par le point $A(0; -1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.
3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f .

On considère que la fonction f est définie sur $]-2; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$, où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2 . Interpréter graphiquement ce résultat.
On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2; +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2; +\infty[$.
6. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

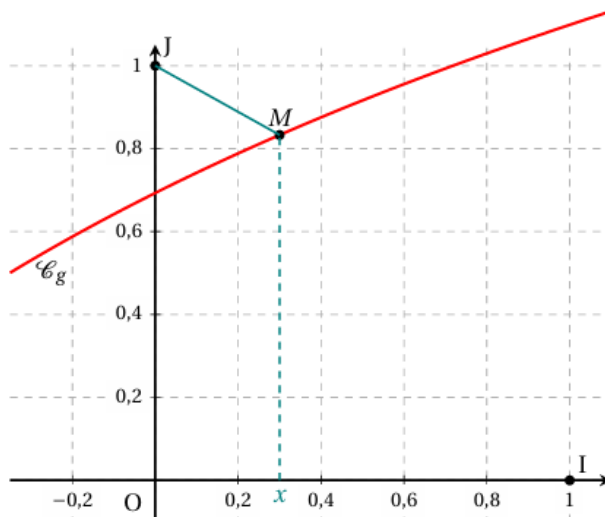
Soit g la fonction définie sur $]-2; +\infty[$ par : $g(x) = \ln(x + 2)$.

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, représentée ci-après.

Soit M un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $]-2; +\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$.
2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.
 - a. Montrer que pour tout réel $x > -2$, $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$ où f est la fonction étudiée en partie B.
 - b. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2; +\infty[$.
Les limites ne sont pas demandées.
 - c. En déduire la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale.
3. On notera M_α le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse α .
Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires, en utilisant le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1 .

Exercice 3 (4 points)

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au 1er juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

On souhaite décrire la superficie de cette zone recouverte par la posidonie avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t , en années, écoulées à partir du 1^{er} juillet 2024, la superficie, en ha, de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$
- f ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$
- f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$
- f est solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_1) : y' = 0,02y(15 - y)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{f(t)}$.

Sachant que f est solution de l'équation différentielle (E_1) , montrer que g est solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' = -0,3y + 0,02$.

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2) .

3. En déduire que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$, la solution de l'équation (E_1) telle que $f(0) = 1$ est :

$$f(t) = \frac{15}{14e^{-0,3t} + 1}.$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 (6 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

○○○○○○○○○○

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 \\ z = 2 - 6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

On considère également les points suivants :
▪ $A(3; -3; -2)$
▪ $B(5; -4; -1)$
▪ C le point de la droite (d) d'abscisse 2.

Affirmation 1 : La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2 : Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :
 $x + 3z + 3 = 0$.

Affirmation 3 : Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{6}$.

○○○○○○○○○○

Une concession automobile vend des véhicules à moteur électrique et des véhicules à moteur thermique.
Certains clients, avant de se rendre sur le site de la concession, ont consulté la plate-forme numérique de la concession. On a ainsi observé que :

- 20 % des clients sont intéressés par les véhicules à moteur électrique et 80 % préfèrent s'orienter vers l'achat d'un véhicule à moteur thermique ;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique, la probabilité qu'il ait consulté la plate-forme numérique est 0,5 ;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur thermique, la probabilité qu'il ait consulté la plate-forme numérique est 0,375.

On considère les évènements suivants :

- C : « un client a consulté la plate-forme numérique » ;
- E : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique » ;
- T : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur thermique ».

Les clients font des choix indépendants les uns des autres.

Affirmation 4 : On suppose qu'un client a consulté la plate-forme numérique.
La probabilité que ce client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique est 0,1.
(justifier en utilisant un arbre pondéré et en rédigeant chaque étape avec précision et rigueur)

La concession accueille quotidiennement n clients en moyenne.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients souhaitant acquérir un véhicule à moteur électrique.

Affirmation 5 : 11 est la plus petite valeur de n telle que la probabilité qu'au moins un client souhaite acheter un véhicule électrique au cours d'une journée soit supérieure à 0,9.
(justifier en indiquant la loi suivie par X et en résolvant une inéquation)