

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL BLANC

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 décembre 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures

*L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collègue », est autorisé.*

Dès que ce sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.
Seule la feuille annexe (exercice 4) sera à dégrafer et à rendre avec votre copie.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 1 (5,5 points)

Les données publiées le 1^{er} mars 2023 par le ministère de la transition écologique sur les immatriculations de véhicules particuliers en France en 2022 contiennent les informations suivantes :

- 22,86 % des véhicules étaient des véhicules neufs ;
- 8,08 % des véhicules neufs étaient des hybrides rechargeables ;
- 1,27 % des véhicules d'occasion (c'est-à-dire qui ne sont pas neufs) étaient des hybrides rechargeables.

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au dix-millième.

Partie I

Dans cette partie, on considère un véhicule particulier immatriculé en France en 2022.

On note :

- N l'évènement « le véhicule est neuf » ;
 - R l'évènement « le véhicule est hybride rechargeable » ;
 - \bar{N} et \bar{R} les évènements contraires des évènements N et R .
1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
 2. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf et hybride rechargeable.
 3. Démontrer que la valeur arrondie au dix-millième de la probabilité que ce véhicule soit hybride rechargeable est 0,0283.
 4. Calculer la probabilité que ce véhicule soit neuf sachant qu'il est hybride rechargeable.

Partie II

Dans cette partie, on choisit 500 véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022.

Dans la suite, on admettra que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces 500 véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules neufs parmi les 500 véhicules choisis.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.
2. Déterminer la probabilité qu'exactly 325 de ces véhicules soient neufs.
3. Déterminer la probabilité $p(X \geq 325)$ puis interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie III

On choisit désormais n véhicules particuliers hybrides rechargeables immatriculés en France en 2022, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On rappelle que la probabilité qu'un tel véhicule soit neuf est égale à 0,65.

On assimile le choix de ces n véhicules à un tirage aléatoire avec remise.

On note q_n la probabilité qu'au moins un de ces véhicules soit neuf.

Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de n telle que $q_n \geq 0,9999$.

Exercice 2 (4,5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 1}$.
On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.
2. Résoudre $f(x) = x$ sur $[0; +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la partie A.

On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n .

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Partie C

On considère la fonction ci-dessous, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le rang du premier terme de la suite (u_n) tel que $u_n \leq 1,62$.

```
def seuil () :  
    u = 5  
    i = 0  
    while ..... :  
        u = sqrt ( u + 1 )  
        i = .....  
    return i
```

*On rappelle que la commande sqrt(x)
renvoie la racine carrée de x.*

1. Recopier le programme et compléter les instructions manquantes.
2. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction? (Justifier)

Exercice 3 (7,5 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, on a $g'(x) = -xe^x$.
3. En déduire la tableau de variation de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
4. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
5. Déterminer une valeur approchée du réel α au centième près.
6. Donner le tableau de signes de la fonction g sur $[0; +\infty[$.

Partie B

On note \mathcal{E}_g sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à \mathcal{E}_g au point d'abscisse 1.
2. Etudier la convexité de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
3. Déterminer la position relative de la droite T et de la courbe \mathcal{E}_g sur $[0; +\infty[$.

Partie C

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$.

On note \mathcal{E}_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer la dérivée de la fonction f sur $[0; +\infty[$ et en déduire que le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$ avec g la fonction définie dans la partie A.
3. Montrer que $f(\alpha) = 4(\alpha - 1)$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

Nom :

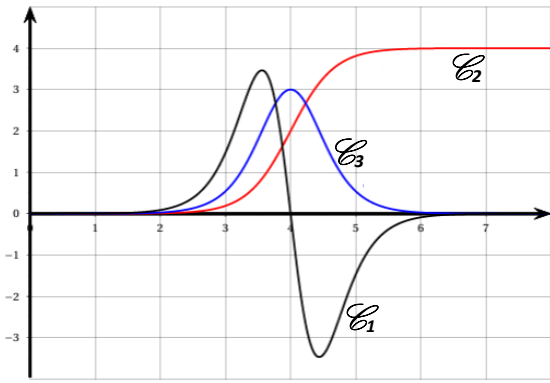
Groupe :

Prénom :

ANNEXE A COMPLETER ET A RENDRE AVEC VOTRE COPIE

Exercice 4 (2,5 points)

Répondre aux questions ci-dessous en complétant le tableau **sans justifier**.

		Réponses :
1	<p>Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = 1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{9}\right)^n$.</p> <p>Donner la valeur exacte de $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.</p>	$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \dots\dots\dots$
2	<p>X est une variable aléatoire réelle qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,43$.</p> <p>Donner la plus petite valeur de n telle que $p(X \leq n) > 0,95$.</p>	$n = \dots\dots\dots$
3	<p>Soit a un nombre réel et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :</p> $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 2x - 5}{x - 1} & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = e^{ax+3} & \text{si } x > -1 \end{cases}$ <p>Donner la ou les valeurs de a telles que la fonction f soit continue sur \mathbb{R}.</p>	$a = \dots\dots\dots$
4	<p>Le plan est ramené à un repère orthogonal. On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''. Indiquer quelle courbe correspond à quelle fonction.</p> 	$f : \dots\dots\dots$ $f' : \dots\dots\dots$ $f'' : \dots\dots\dots$
5	<p>f est une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = (e^t - e^{-t})^{10}$.</p> <p>Donner l'expression de $f'(t)$.</p>	$f'(t) = \dots\dots\dots$