

DEVOIR (1h50)
(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (10 points)

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles.

Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.

Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.

Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année, on notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.

Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n -ième année.

Ainsi, on a : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8u_n + c$.

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la monotonie et la convergence de la suite (u_n) .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1, en justifiant votre réponse. Interpréter ces deux résultats.

4. L'apiculteur souhaite savoir au bout de combien de temps il aura plus de 40 000 abeilles.
Recopier et compléter la fonction suivante, écrite en langage Python, pour que l'instruction `seuil(4)` renvoie la valeur demandée par l'apiculteur.
Quelle est cette valeur ?

```
def seuil(a) :
    n = 0
    u = ...
    while ... :
        n = ...
        u = 0.8 * u + 1
    return ...
```

5. Sachant que 10 000 abeilles produisent environ 5 kg par an, on note S_n la quantité de miel obtenue (en kg) durant les n premières années par cet apiculteur. On a donc : $S_n = 5 u_0 + 5 u_1 + \dots + 5 u_{n-1}$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1. Déterminer une expression de S_n en fonction de n .

Partie B

On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme en fonction de c .
2. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 5c + (1 - 5c) \times 0,8^n$.
3. Déterminer une valeur approchée de c à 10^{-4} près pour que l'apiculteur ait environ 50 000 abeilles au bout de 4 ans.

.../...

Exercice 2 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x} - x}$$

1°) Déterminer les limites en 0, 1 et $+\infty$ de f .

2°) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe représentatives de f .

Exercice 3 (3 points)

Déterminer les limites suivantes :

1°) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x - 3x - 5$

2°) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}$