

DEVOIR de Mathématiques (1h50)
(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (11 points)

Une ferme aquatique exploite une population de crevettes qui évolue en fonction de la reproduction naturelle et des prélèvements effectués.

La masse initiale de cette population de crevettes est estimée à 100 tonnes.

Compte tenu des conditions de reproduction et de prélèvement, on modélise la masse de la population de crevettes, exprimée en tonne, en fonction du temps, exprimé en semaine, par la fonction f_p , définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_p(t) = \frac{100p}{1 - (1-p)e^{-pt}}$$

où p est un paramètre strictement compris entre 0 et 1 et qui dépend des différentes conditions de vie et d'exploitation des crevettes.

1. Cohérence du modèle

a. Calculer $f_p(0)$.

b. On rappelle que $0 < p < 1$.

Démontrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$, $1 - (1-p)e^{-pt} \geq p$.

c. En déduire que pour tout nombre réel $t \geq 0$, $0 < f_p(t) \leq 100$.

2. Étude de l'évolution lorsque $p = 0,9$

Dans cette question, on prend $p = 0,9$ et on étudie la fonction $f_{0,9}$ définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f_{0,9}(t) = \frac{90}{1 - 0,1e^{-0,9t}}$$

a. Déterminer les variations de la fonction $f_{0,9}$.

b. Démontrer pour tout nombre réel $t \geq 0$, $f_{0,9}(t) \geq 90$.

c. Interpréter les résultats des questions 2. a. et 2. b. dans le contexte.

3. Retour au cas général

On rappelle que $0 < p < 1$.

Exprimer en fonction de p la limite de f_p lorsque t tend vers $+\infty$.

4. Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{2}$.

a. Montrer que la fonction H définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$H(t) = 100 \ln \left(2 - e^{-\frac{t}{2}} \right) + 50t$$

est une primitive de la fonction $f_{1/2}$ sur cet intervalle.

b. En déduire la masse moyenne de crevettes lors des 5 premières semaines d'exploitation, c'est-à-dire la valeur moyenne de la fonction $f_{1/2}$ sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

En donner une valeur approchée arrondie à la tonne.

Exercice 2 (9 points)

La société Fibration fournit des abonnements Internet et des abonnements de téléphone mobile. Un client de la société Fibration souscrit soit un abonnement Internet, soit un abonnement de téléphone mobile, il ne cumule pas les deux. En cas de difficulté, la société Fibration propose à ses clients une ligne d'assistance téléphonique : le client doit d'abord signaler s'il est client Internet ou s'il est client mobile puis son appel est mis en attente de réponse par un opérateur.

Les parties A, B ~~et C~~ sont indépendantes.

Si nécessaire, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

Partie A - Durée d'attente

1. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client Internet lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. Une étude permet de modéliser cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_1 qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,6.
 - a. Quelle est la durée d'attente moyenne que peut espérer un client Internet qui appelle cette ligne d'assistance?
 - b. Calculer la probabilité que la durée d'attente d'un client Internet choisi au hasard soit inférieure à 5 minutes.
2. Dans cette question, on s'intéresse à la durée d'attente d'un client mobile lorsqu'il contacte l'assistance téléphonique avant de joindre un opérateur. On modélise cette durée d'attente en minutes par la variable aléatoire D_2 qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , λ étant un réel strictement positif.
 - a. Sachant que $P(D_2 \leq 4) = 0,798$, déterminer la valeur de λ .
 - b. En prenant $\lambda = 0,4$, peut-on considérer que moins de 10 % des clients mobile choisis au hasard attendent plus de 5 minutes avant de joindre un opérateur?

Partie B - Obtention d'un opérateur

Si la durée d'attente avant l'obtention d'un opérateur dépasse 5 minutes, l'appel prend automatiquement fin. Sinon, l'appelant obtient un opérateur.

On choisit au hasard un client qui appelle la ligne d'assistance.

On admet que la probabilité que l'appel émane d'un client Internet est 0,7.

De plus, d'après la partie A, on prend les données suivantes :

- Si l'appel provient d'un client Internet alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,95.
- Si l'appel provient d'un client mobile alors la probabilité d'obtenir un opérateur est égale à 0,87.

1. Déterminer la probabilité que le client joigne un opérateur.
2. Un client se plaint que son appel a pris fin après 5 minutes d'attente sans avoir obtenu d'opérateur. Est-il plus probable que ce soit un client Internet ou un client mobile?