

DEVOIR de Mathématiques (1h50)
(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 (9 points)

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1^{er} juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve descend en dessous de 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année 2017 + n . On a donc $u_0 = 3000$.

1. Justifier que $u_1 = 2\,926$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n) . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

4.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1\,520$.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
5. On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 1\,520$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1\,520$.
 - c. Conjecturer la limite de la suite (u_n) .
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

```

n ← 0
u ← 3 000
Tant que . . .
    n ← . . .
    u ← . . .
Fin de Tant que
    
```

La notation « \leftarrow » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ?
Si oui, déterminer en justifiant à l'aide de la calculatrice, l'année de la fermeture.

Exercice 2 (4 points)

Pour tout entier naturel n , on note P_n et Q_n les propositions suivantes :

- P_n : « L'entier $10^n - 1$ est divisible par 9 »
- Q_n : « L'entier $10^n + 1$ est divisible par 9 »

1°) Démontrer que les propriétés P_n et Q_n sont héréditaires pour tout entier naturel n .

2°) Les propriétés P_n et Q_n sont-elles vraies pour tout entier naturel n ? Justifier.

Exercice 3 (7 points)

1°) Soient les nombres complexes : $z = 2 - i$ et $z' = 1 + 3i$, écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

a) $z_1 = z^2 + z'^2$.

b) $z_2 = \frac{1}{z} - \bar{z}'$.

c) $z_3 = \frac{z+i}{z'+2}$.

2°) Résoudre dans \mathbf{C} les équations suivantes (on donnera les résultats sous forme algébrique) :

a) $(E_1) : (1 + i)z + 1 = 2z + i - 1$.

b) $(E_2) : 3z^2 + 2z + 1 = 0$.

c) $(E_3) : z^2 + 4\bar{z} = 3$.