BACCALAURÉAT BLANC N°2

SESSION 2018

MATHEMATIQUES

VENDREDI 16 FEVRIER 2018

Séries : **S**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 heures

Les calculatrices en mode examen sont autorisées.

Ce sujet comporte 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

*Le candidat doit traiter **les exercices 1, 2 et 3** ainsi que*
l'exercice 4 correspondant à sa spécialité

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'une tumeur composée de cellules cancéreuses.
On note $N(t)$ le nombre de cellules cancéreuses après un temps t exprimé en semaines
et $N(0) = N_0$ le nombre de cellules cancéreuses au premier examen.
Pour tout réel t positif ou nul, on admet qu'il existe un nombre a tel que :

$$N(t)= N_0\, e^{at}.$$

1. Des cultures en laboratoire ont montré que le nombre de cellules de la tumeur double en 14 semaines.
En déduire la valeur du paramètre a.

2. En arrondissant la valeur de a obtenue, on peut écrire pour tout réel $t > 0$,

$$N(t) = N_0\, e^{0,05t}.$$

La plus petite tumeur détectable au toucher contient environ 10^9 cellules.
Lorsqu'une tumeur est détectable, on décide d'opérer le patient afin de la retirer.
Or, après intervention, il est possible qu'il reste jusqu'à 10^4 cellules indétectables.
En l'absence de suivi médical, en supposant qu'il reste 10^4 cellules cancéreuses après une intervention et que l'examen post-opératoire peut-être considéré comme un premier examen, au bout de combien de temps la tumeur pourrait-elle redevenir détectable au toucher ?

Partie B

Pour atténuer le risque de récidive, le médecin peut proposer de compléter l'opération par une chimiothérapie. Lors d'un traitement par chimiothérapie en intraveineuse, la concentration du médicament dans l'organisme, exprimée en μmol.L^{-1}, peut être modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction c définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$c(t) = \frac{D}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{80}t}\right)$$

où

- D est un réel positif qui représente le débit d'écoulement du médicament dans la perfusion, exprimé en micromole par heure ;
- k est un réel positif qui représente la clairance du patient, exprimée en litre par heure.

La clairance traduit la capacité interne du patient à éliminer plus ou moins vite le médicament de son organisme. Elle est propre à chaque individu et est inconnue au début du traitement. Il est nécessaire de la déterminer afin que le médecin puisse adapter le traitement en ajustant le débit D.

1. Détermination de la clairance

Afin de déterminer la clairance, on effectue les mesures suivantes. On règle le débit de la perfusion sur 112 μmol.h^{-1} ; au bout de 6 heures, on prélève un échantillon de sang du patient et on mesure la concentration du médicament : elle est égale à 6,8 μmol.L^{-1}.

a. Justifier que la clairance k du patient est solution de l'équation

$$112\left(1 - e^{-\frac{3}{40}k}\right) - 6{,}8\,k = 0$$

b. Démontrer que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de cette solution. Interpréter ce résultat.

2. Réglage du débit

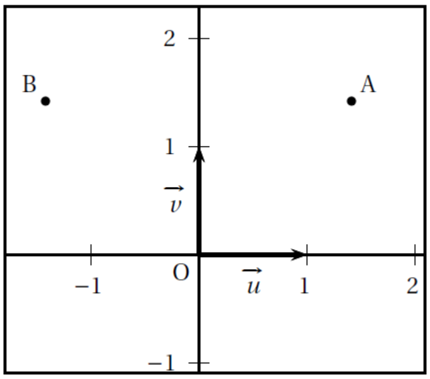
a. Déterminer la limite ℓ de la fonction c en $+\infty$ en fonction du débit D et de la clairance k.

b. La concentration du médicament dans le sang se rapproche rapidement de sa limite ℓ.
Pour que le traitement soit efficace sans devenir toxique, cette concentration limite doit être de 16 μmol.L^{-1}.
En déduire le débit D, à régler par le médecin, lorsque la clairance du patient est de 5,85 L.h^{-1}.

Exercice 2 (3 points)

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_{\mathrm{B}} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.



1. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.

2. On considère l'équation :

$$(E) : z^2 - \sqrt{6}\, z + 2 = 0.$$

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

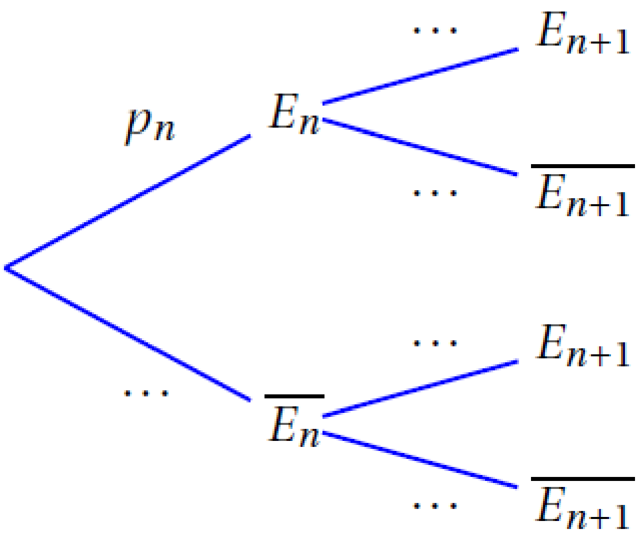
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n + 1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leq p_n < 1$.

1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0
	J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P < $0{,}05 - 10^{-K}$
	P prend la valeur 0,2×P + 0,04
	J prend la valeur J + 1
	Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ?
Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

f. Déterminer à partir de quelle valeur de l'entier n on a : $p_n \geq 0{,}04999$.
Quelle valeur de K faut-il saisir dans l'algorithme précédent pour retrouver ce résultat ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0{,}05$.
On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.
On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

Exercice 4 (5 points)

Candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité mathématiques.

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5% par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016 + n$. On a donc : $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par :
$u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1,1}{605} u_n^2 + 1,1\, u_n$.

1. On considère la fonction g définie sur **R** par :

$$g(x) = -\frac{1,1}{605} x^2 + 1,1\, x.$$

a. Justifier que g est croissante sur $[0 ; 60]$.
b. Résoudre dans **R** l'équation $g(x) = x$.

2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
a. Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 55$.
c. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
d. En déduire la convergence de la suite (u_n).
e. On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
Il utilise l'algorithme suivant.

Variables	n un entier naturel
	u un nombre réel
Traitement	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 12
	Tant Que ……………………………………………
	u prend la valeur ……………………………
	n prend la valeur ……………………………
	Fin Tant Que
Sortie	Afficher ………………………………………………

Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geq 50$.

Exercice 4 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de <u>spécialité mathématiques</u>.

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$u_{n+1} = 2u_n + 6.$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 9 \times 2^n - 6$.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».
Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4. a. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

b. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

c. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

5. a. Vérifier que : $2^4 \equiv 1$ [5].

b. En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

c. Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.