BACCALAUREAT GENERAL

SESSION Février 2018

MATHEMATIQUES

SERIE ES-L

LYCEE LA SALLE PASSY BUZENVAL

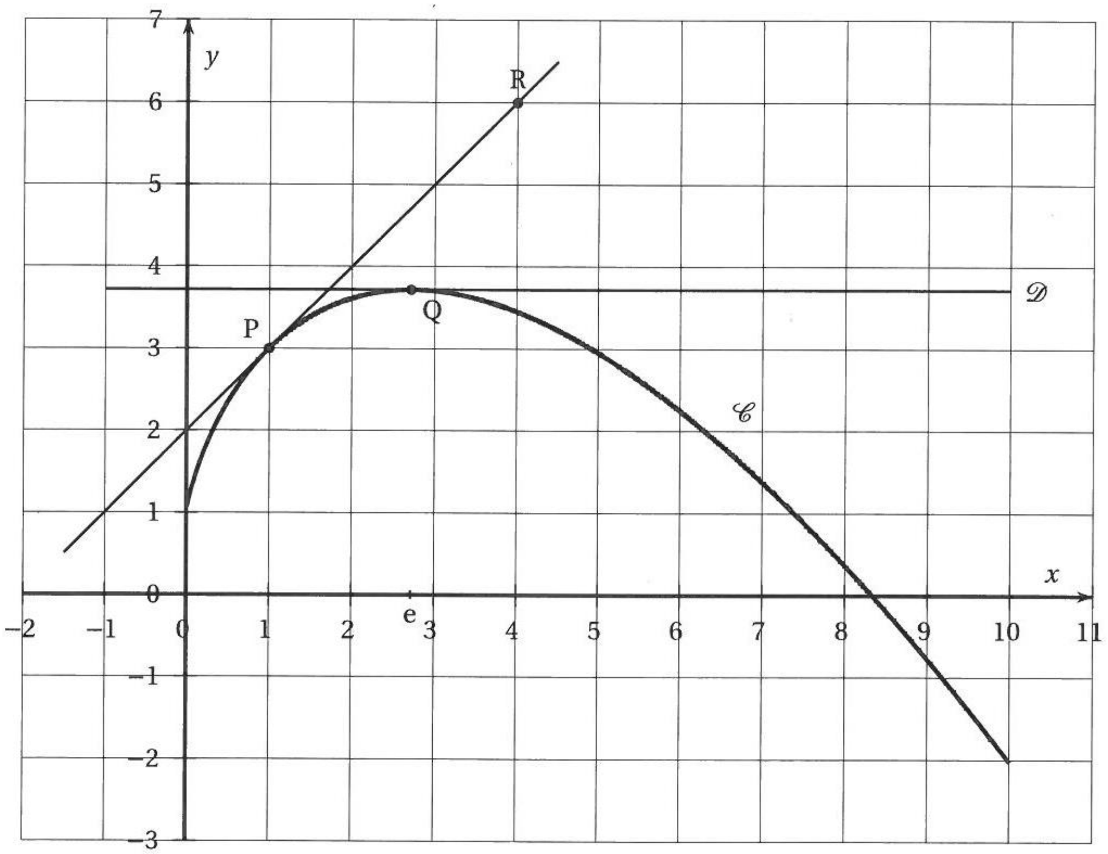
DUREE DE L'EPREUVE 3 HEURES

L'UTILISATION DE LA CALCULATRICE EST AUTORISEE

EN MODE EXAMEN .

Exercice 1 commun à tous les candidats 5 points

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous dans un repère orthonormé d'origine O est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,10]$.



On considère les points P (1 ; 3) et R (4 ; 6). Le point Q a pour abscisse e, avec $e \approx 2,718$.
Les points P et Q appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$. La droite $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des abscisses et passe par le point Q.
La droite (PR) est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point P et la droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe v au point Q.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
Les parties **A** et **B** sont indépendantes.

Partie A

Dans cette partie, les résultats seront donnés à l'aide d'une lecture graphique et sans justification.

1. Parmi les trois propositions ci-dessous, quelle est celle qui désigne l'équation de la droite (PR) ?

a. $y = 2x + 1$ **b.** $y = x + 2$ **c.** $y = 2x + 2$

2. Donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Une seule de ces trois propositions est exacte :
   a. f est convexe sur l'intervalle $]0\,;10]$;
   b. f est concave sur l'intervalle $]0\,;10]$;
   c. f n'est ni convexe ni concave sur l'intervalle $]0\,;10]$.

   Laquelle ?

Partie B

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;10]$ par :

$$f(x) = -x\ln x + 2x + 1.$$

1. a. Calculer $f'(x)$.
   b. Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0\,;10]$.
   c. Calculer la valeur exacte du maximum de la fonction f sur ce même intervalle.
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $]0\,;10]$.
3. On admet que la fonction F définie par $F(x) = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{5}{4}x^2 + x - 7$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;10]$.

<u>Exercice 2</u> commun à tous les candidats 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par :

$$f(x) = 4\mathrm{e}^{-0,5x+1} + x - 1$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1\,;10]$ et on note f' sa fonction dérivée.
On donne en annexe, à remettre avec la copie, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;10]$ dans un repère d'origine O.

Partie A

1. Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;10]$ on a : $f'(x) = -2\mathrm{e}^{-0,5x+1} + 1$.
2. **a.** Montrer que sur l'intervalle $[1\,;10]$, l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution le nombre $\alpha = 2 + 2\ln 2$.

   b. Placer sur le graphique fourni en annexe le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse α.
3. On admet que l'ensemble des solutions sur l'intervalle $[1\,;10]$ de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ est $[2+2\ln 2\,;\,10]$.
   En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;10]$.

Partie B

L'entreprise « COQUE EN STOCK » fabrique et commercialise des coques pour téléphone portable.
Son usine est en mesure de produire entre 100 et 1 000 coques par jour.
La fonction f permet de modéliser le coût de production d'une coque en fonction du nombre de centaines de coques produites par jour. Ainsi, si x désigne le nombre de centaines de coques produites alors $f(x)$ représente le coût, en euros, de production d'une coque.

1. Calculer, au centime près, le coût de production d'une coque dans le cas de la fabrication de 500 coques par jour.
2. **a.** Montrer que produire 339 coques par jour permet de minimiser le coût unitaire de production.

   b. En déduire le coût minimal de production d'une coque, en euros, au centime près.

Partie C

Le prix de vente d'une coque peut être modélisé par la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;10]$ par :

$$g(x) = -\frac{1}{4}x + 6$$

où x désigne le nombre de centaines de coques produites et $g(x)$ le prix de vente d'une coque en euros.
Estimer les quantités de coques à produire par jour afin d'assurer un bénéfice à l'entreprise.

Exercice 3 commun à tous les candidats 5 point

L'angine chez l'être humain est provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne), soit par un virus (angine virale).
On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie.
L'angine est bactérienne dans 20 % des cas.
Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne, mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30 % des cas;
- si l'angine est virale, le test est positif dans 10 % des cas.

On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :

- B l'évènement : « l'angine du malade est bactérienne »;
- T l'évènement : « le test effectué sur le malade est positif ».

On rappelle que si E et F sont deux évènements, $p(E)$ désigne la probabilité de E et $p_F(E)$ désigne la probabilité de E sachant que F est réalisé. On note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
2. a. Quelle est la probabilité que l'angine du malade soit bactérienne et que le test soit positif?

   b. Montrer que la probabilité que le test soit positif est $0,22$.

   c. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne?
3. On choisit au hasard cinq malades atteints d'une angine.
   On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les cinq malades choisis, le nombre de malades dont le test est positif.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X?

   b. Calculer la probabilité qu'au moins l'un des cinq malades ait un test positif.

   c. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 4 Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Mathieu dispose d'un capital de 20 000 euros qu'il veut placer. Sa banque lui propose de choisir entre deux contrats d'épargne.

Contrat A : Le capital augmente chaque année de 4 %.
Contrat B : Le capital augmente chaque année de 2,5 % et une prime annuelle fixe de 330 euros est versée à la fin de chaque année et s'ajoute au capital.

On note a_n le capital, en euro, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat A.
b_n le capital, en euro, acquis au bout de n années si Mathieu choisit le contrat B.
On a donc $a_0 = b_0 = 20000$ et, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = 1,04a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 1,025b_n + 330.$$

1. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat A.

a. Calculer la valeur, arrondie à l'euro, du capital disponible au bout de 10 ans.

b. Déterminer le pourcentage d'augmentation du capital entre le capital de départ et celui obtenu au bout de 10 ans. Arrondir le résultat à 1 %.

2. Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat B.
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par
$u_n = 13200 + b_n$.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 1,025 et calculer son premier terme u_0.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a

$$b_n = 33200 \times 1,025^n - 13200.$$

d. Déterminer au bout de combien d'années le capital disponible devient supérieur à 40 000 euros.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables
A est un nombre réel
B est un nombre réel
N est un nombre entier naturel
Traitement
A prend la valeur 20 000
B prend la valeur 20 000
N prend la valeur 0
Tant que $A \leqslant B$
    A prend la valeur $1,04 \times A$
    B prend la valeur $1,025 \times B + 330$
    N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que
Sortie
Afficher N

a. Le tableau ci-dessous traduit l'exécution pas à pas de l'algorithme.
Recopier et compléter ce tableau en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les valeurs de A et de B seront arrondies à l'unité.

Valeur de A	20 000	....	....
Valeur de B	20 000	....	....
Valeur de N	0	....	....
Condition $A \leqslant B$	vraie	....	....

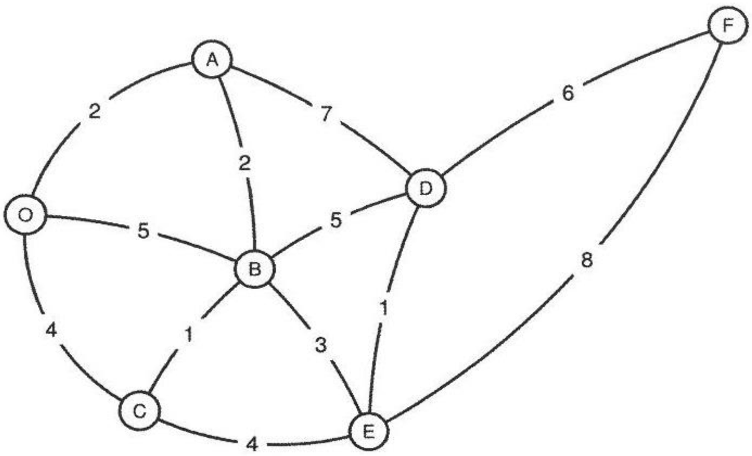
b. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 5 Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

PARTIE A

Alex a téléchargé sur son smartphone un jeu lui permettant de combattre des animaux virtuels par localisation GPS. Le graphe pondéré représenté ci-dessous illustre le trajet qu'Alex doit suivre en marchant dans les rues de sa ville et le nombre d'animaux virtuels qu'il doit combattre sur la route suivie.



À l'aide d'un algorithme, déterminer le nombre minimal de créatures qu'Alex doit combattre s'il part du point O pour arriver au point F de la ville. Détailler les étapes de l'algorithme.

PARTIE B

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.
Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x-ième jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.
2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 & 0,5 \\ -2,5 & 4 & -1,5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Calculer $M \times A$.
   b. Que représente la matrice M pour la matrice A?
4. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2 500 personnes.
   Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours? Justifier la réponse.

c. A l'aide d'un calcul matriciel, déterminer les valeurs des nombres a, b et c

ANNEXE

À remettre avec la copie