Jeudi 23 février 2017 Term S

Interrogation de Spécialité Mathématiques (1h50)

(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(10 points)*

Partie A

On considère l'équation (E) : $15x - 26k = m$ où x et k désignent des nombres entiers relatifs et m est un paramètre entier non nul.

1. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u\,;\,v)$ tel que $15u - 26v = 1$.
   Trouver un tel couple.
2. En déduire une solution particulière $(x_0\,;\,k_0)$ de l'équation (E).
3. Montrer que $(x\,;\,k)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si $15(x - x_0) - 26(k - k_0) = 0$.
4. Montrer que les solutions de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\,;\,k)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 26q + 7m \\ k & = & 15q + 4m \end{array}\right. \quad \text{où } q \in \mathbb{Z}.$$

Partie B

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un système de codage :

— à chaque lettre de l'alphabet, on associe l'entier x correspondant,

— on associe ensuite à x l'entier y qui est le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26,

— on associe à y la lettre correspondante.

Ainsi, par cette méthode, la lettre E est associée à 4, 4 est transformé en 15 et 15 correspond à la lettre P et donc la lettre E est codée par la lettre P.

1. Coder le mot **MATHS**.
2. Soit x le nombre associé à une lettre de l'alphabet à l'aide du tableau initial et y le reste de la division euclidienne de $15x + 7$ par 26.
   - **a.** Montrer alors qu'il existe un entier relatif k tel que $15x - 26k = y - 7$.
   - **b.** En déduire que $x \equiv 7y + 3 \pmod{26}$.
   - **c.** En déduire une description du système de décodage associé au système de codage considéré.
3. Expliquer pourquoi la lettre W dans un message codé sera décodée par la lettre B.
   Décoder le mot WHL.
4. Montrer que, par ce système de codage, deux lettres différentes sont codées par deux lettres différentes.

Exercice 2 *(10 points)*

Les nombres de la forme $2^n - 1$ où n est un entier naturel non nul sont appelés **nombres de Mersenne**.

1. On désigne par a, b et c trois entiers naturels non nuls tels que PGCD$(b\,;\,c) = 1$.
   Prouver, à l'aide du théorème de Gauss, que :

   si b divise a et c divise a alors le produit bc divise a.

2. On considère le nombre de Mersenne $2^{33} - 1$.
   Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$\left(2^{33}-1\right) \div 3$	2863311530
$\left(2^{33}-1\right) \div 4$	2147483648
$\left(2^{33}-1\right) \div 12$	715827882,6

   Il affirme que 3 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 4 divise $\left(2^{33}-1\right)$ et 12 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

   a. En quoi cette affirmation contredit-elle le résultat démontré à la question **1.** ?

   b. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $\left(2^{33}-1\right)$.

   c. En remarquant que $2 \equiv -1 \quad [3]$, montrer que, en réalité, 3 ne divise pas $2^{33} - 1$.

   d. Calculer la somme $S = 1 + 2^3 + \left(2^3\right)^2 + \left(2^3\right)^3 + \cdots + \left(2^3\right)^{10}$.

   e. En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

3. On considère le nombre de Mersenne $2^7 - 1$. Est-il premier ? Justifier.

4. On donne l'algorithme suivant où MOD$(N,\ k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k.

Variables :	n entier naturel supérieur ou égal à 3 k entier naturel supérieur ou égal à 2
Initialisation :	Demander à l'utilisateur la valeur de n. Affecter à k la valeur 2.
Traitement :	Tant que MOD$(2^n-1,\ k) \neq 0$ et $k \leqslant \sqrt{2^n-1}$ Affecter à k la valeur $k+1$ Fin de Tant que.

Sortie :	**Afficher** k.
	Si $k > \sqrt{2^n-1}$
	        Afficher « CAS 1 »
	Sinon
	        Afficher « CAS 2 »
	Fin de Si

   a. Qu'affiche cet algorithme si on saisit $n = 33$? Et si on saisit $n = 7$?

   b. Que représente le CAS 2 pour le nombre de Mersenne étudié ? Que représente alors le nombre k affiché pour le nombre de Mersenne étudié ?

   c. Que représente le CAS 1 pour le nombre de Mersenne étudié ?