Nom : Mercredi 10 mai 2017

Prénom : TS_4

DEVOIR de Mathématiques (Non-Spé :2h30 / Spé :3h)

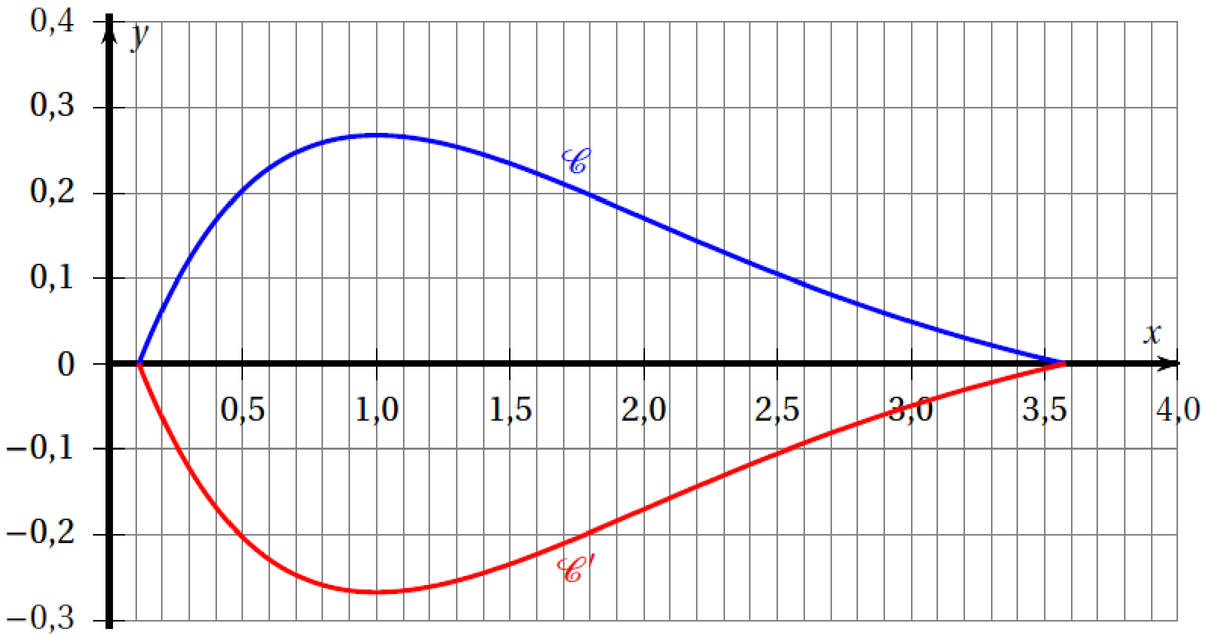
Calculatrice autorisée – Penser à rendre le sujet

Exercice 1 *(5 points)*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x\,e^{-x} - 0{,}1$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur l'intervalle $[0\,;1]$.

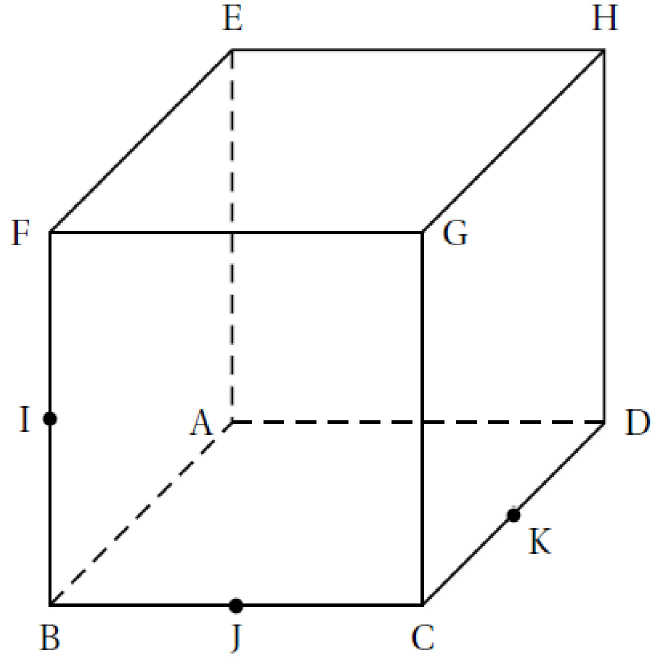
On admet l'existence du nombre réel strictement positif β tel que $\alpha < \beta$ et $f(\beta) = 0$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$ dans un repère orthogonal et $\mathscr{C}'$ la courbe symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
L'unité sur chaque axe représente 5 mètres.
Ces courbes sont utilisées pour délimiter un massif floral en forme de flamme de bougie sur lequel seront plantées des tulipes.



4. Démontrer que la fonction F, définie sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$ par : $F(x) = -(x+1)\,e^{-x} - 0{,}1x$
est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[\alpha\,;\beta]$.
5. Calculer, en unités d'aire, une valeur arrondie à 0,01 près de l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
On utilisera les valeurs arrondies à 0,001 près suivantes : $\alpha \approx 0{,}112$ et $\beta \approx 3{,}577$.
6. Sachant que l'on peut disposer 36 plants de tulipes par mètre carré, calculer le nombre de plants de tulipes nécessaire à la réalisation de ce massif.

<u>Exercice 2</u> *(7,5 points)*

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [CD].



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie ci-dessus et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE})$

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle [0 ; 1] tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AG}$.

a. Démontrer que $MI^2 = 3\,t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point M(½ ; ½ ; ½)

4. Démontrer que pour ce point M(½ ; ½ ; ½) :
a. M appartient au plan (IJK).
b. La droite (IM) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

<u>Exercice 3</u> *(7,5 points)*

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12.
Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.
On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.
On rappelle que pour tout réel positif t , $p(Y \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$
Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. Exprimer $p(Y \leq 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}128$.

2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?

3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?

4. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces moteurs est égale à $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$

où F est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $F(t) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

a) Déterminer, en fonction de λ, les réels a, b et k tels que : $F(t) = (a + bt)e^{-\lambda t} + k$.
b) Calculer la valeur de d_m. On arrondira à 10^{-1}.

<u>Exercice 4 pour les élèves suivant la spécialité mathématiques uniquement !</u> *(Barème séparé !)*

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60% présentent des failles de sécurité.
Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.

On estime que chaque jour, il remet en état 7% des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3% des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.
Ainsi $a_0 = 0{,}4$ et $b_0 = 0{,}6$.

Partie A

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.

2. Déterminer a_1 et b_1.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}07 \\ 0{,}03 & 0{,}93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.
c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30}. En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.
b. Montrer que, pour tout entier naturel n,
$X_{n+1} = DX_n + B$.

2. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - 10B$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = DY_n$.
b. On admet que pour tout entier naturel n, $Y_n = D^n Y_0$.
En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = D^n (X_0 - 10B) + 10B$.
c. Donner l'expression de D^n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n.

3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?