Mercredi 18 mai 2016 1°S

DEVOIR de Mathématiques (1h50)
(Calculatrice autorisée)

Exercice 1 *(6 points)*

Soit la fonction f définie sur **R** par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+2}$.

On note (C_f) sa courbe représentative.

1°) Déterminer la fonction dérivée de f.
2°) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
3°) a) Déterminer le signe de $f(x) - 1$ sur **R**, que peut-on en déduire pour f ?
b) Démontrer de même que f admet un minimum sur **R** que l'on déterminera.
4°) Déterminer une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse -1.
5°) Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormal en prenant 2 cm pour une unité sur chaque axe.

Exercice 2 *(4 points)*

Au japon, l'espérance de vie à la naissance a progressé de 3 mois par an depuis 1841 et ceci sans discontinuer jusqu'à nos jours.
Au Japon en 2013, l'espérance de vie à la naissance pour les hommes était de 79 ans et pour les femmes de 86 ans.
On appelle (u_n) et (v_n) les suites définies ainsi : Pour tout entier naturel n,

- u_n est l'espérance de vie, exprimée en années, pour un homme japonais l'année $2013 + n$.
- v_n est l'espérance de vie, exprimée en années pour une femme japonaise l'année $2013 + n$.

1°) Quelle sont la nature et les éléments caractéristiques des suites (u_n) et (v_n) ?
2°) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.
3°) Si cette progression se maintient, quelle seront les espérances de vie des hommes et des femmes japonais nées en 2017 ?
4°) Si cette progression se maintient, en quelle année l'espérance de vie pour les femmes japonaises sera-t-elle de 100 ans ?

En réalité, « cette progression dépendra d'innovations à venir dont on ne peut connaitre aujourd'hui le rythme d'accomplissement. Une espérance de vie de 100 ans n'est certainement pas hors de portée, mais nul ne peut encore dire à quelle échéance. »
(Source : *INED Population et Sociétés n° 473 déc. 2010 et n°503 sept. 2013*)

Exercice 3 *(5 points)*

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = n^3 - 9n^2$.

1°) Calculer les 5 premiers termes de la suite.
Quelle conjecture peut-on faire sur la monotonie de la suite (u_n) ?
2°) Calculer u_6 et u_7. La conjecture est-elle toujours valable ?
3°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - u_n = 3n^2 - 15n - 8$.
4°) En déduire une conclusion précise sur la monotonie de la suite (u_n).
5°) Soit l'algorithme suivant :

Variables :	N et U des nombres entiers
Initialisation :	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 0
Traitement :	Tant que $U < 1000$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Affecter à U la valeur $N^3 - 9N^2$
	Fin de Tant Que
Sortie :	Afficher N

Que fait cet algorithme ? À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur affichée en sortie de l'algorithme.

Exercice 4 *(5 points)*

Etude en laboratoire de la mémoire du hamster.
On place un hamster dans une cage. Il se trouve face à cinq portillons dont un seul lui permet de sortir de la cage.
À chaque essai infructueux, il reçoit une décharge électrique et on le replace à l'endroit initial.

1°) On suppose ici que le hamster n'est pas doué d'apprentissage et qu'il choisit donc de façon équiprobable entre les cinq solutions à chaque nouvel essai. On note S_n l'évènement : « Le hamster sort au $n^{\text{ème}}$ essai ».
a) Modéliser par un arbre pondéré la situation jusqu'à trois essais.
b) Déterminer la probabilité des évènements S_1, S_3 et S_7.

2°) On suppose maintenant que le hamster mémorise les essais infructueux et choisit de façon équiprobable entre les portillons qu'il n'a pas encore essayés. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués.
a) Modéliser par un arbre pondéré la situation.
b) Déterminer les valeurs prises par X.
c) Déterminer la loi de probabilité de X.
d) Au bout de combien d'essais le hamster peut-il espérer sortir en moyenne ?