BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION décembre 2014

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 7 ou 9**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 8 pages numérotées de 1/8 à 8/8.

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}\backslash\{2\}$ dont voici le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2

On note g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ si $x \neq 2$ et $g(2) = 0$.

Pour chaque affirmation, indiquer en justifiant, si elle est « Vraie » ou si elle est « Fausse ».
Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. La courbe C_f représentative de f admet deux asymptotes parallèles aux axes du repère.

2. La courbe C_g représentative de g admet deux asymptotes parallèles aux axes du repère.

3. L'équation $f(x) = -3$ admet trois solutions sur $\mathbf{R}\backslash\{2\}$.

4. Les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $\mathbf{R}\backslash\{2\}$.

5. Les fonctions f et g sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs.

Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

On considère pour k réel la fonction f_k définie sur l'intervalle I = $[0 ; 2\pi]$ par : $f_k(x) = x + k \sin(x)$.
On a représenté en annexe la courbe C_1 et une autre courbe C_m pour une certaine valeur entière de m ainsi que sa tangente en O.

1. a. Quelle conjecture peut-on faire graphiquement sur le sens de variation de la fonction f_1 ?
b. Justifier cette conjecture par le calcul.

2. Justifier que toutes les courbes C_k passent par le point O et par deux autres points fixes (indépendants de k) dont on donnera les coordonnées.

3. a. Calculer $f'_m(0)$.
b. À l'aide du graphique, en déduire m.

4. f_{-2} est définie sur l'intervalle I = $[0 ; 2\pi]$ par : $f_{-2}(x) = x - 2 \sin(x)$.
Déterminer les valeurs exactes en lesquelles f_{-2} atteint son minimum et son maximum.

5. Soit k un réel.
a. Soit M un point de C_k d'abscisse x et M' le point de C_k d'abscisse $x + 2\pi$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.
b. En déduire comment tracer C_1 et C_m sur l'intervalle $[2\pi ; 4\pi]$.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.
Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.
a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
b. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de u_n en fonction de n.
c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1 % de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament.
On estime que 20 % du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5 mL, la machine réinjecte 4mL de produit.
Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.
Pour tout entier naturel n, on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n.
L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

```
Variables :       n est un entier naturel.
                  v est un nombre réel.
Initialisation :  Affecter à v la valeur 10.
Traitement :      Pour n allant de 1 à 15
                     | Affecter à v la valeur 0,8 × v.
                     | Si v < 5 alors affecter à v la valeur v + 4
                     | Afficher v.
                  Fin de boucle.
```

a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?
c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6 mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.
Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :
— à l'instant 0, elle injecte 10 mL de médicament,
— toutes les minutes, elle injecte 1 mL de médicament.
On estime que 20 % du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.
Pour tout entier naturel n, on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.
a. Justifier que pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 0{,}8w_n + 1$.
b. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = w_n - 5$.
Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

Exercice 4 (5 points)

Candidats <u>ne suivant pas</u> l'enseignement de spécialité mathématiques.

Partie A Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\bar{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2 = z\,\bar{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et −1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1-z}{\bar{z}-1}$$

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$.

a. Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f, et placer les points C et C' dans le repère donné en annexe.

b. Montrer que le point C' appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.

c. Montrer que les points A, C et C' sont alignés.

2. Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble (Δ) des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.

3. Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel.

Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?

5. On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D' par la transformation f.

Exercice 4 (5 points)

Candidats suivant l'enseignement de spécialité mathématiques.

Rappel :
Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \text{ mod}(7)$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances.*
a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
Démontrer que : si $a \equiv b \text{ mod}(7)$ et $c \equiv d \text{ mod}(7)$ alors $ac \equiv bd \text{ mod}(7)$.
b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls
si $a \equiv b \text{ mod}(7)$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \text{ mod}(7)$.

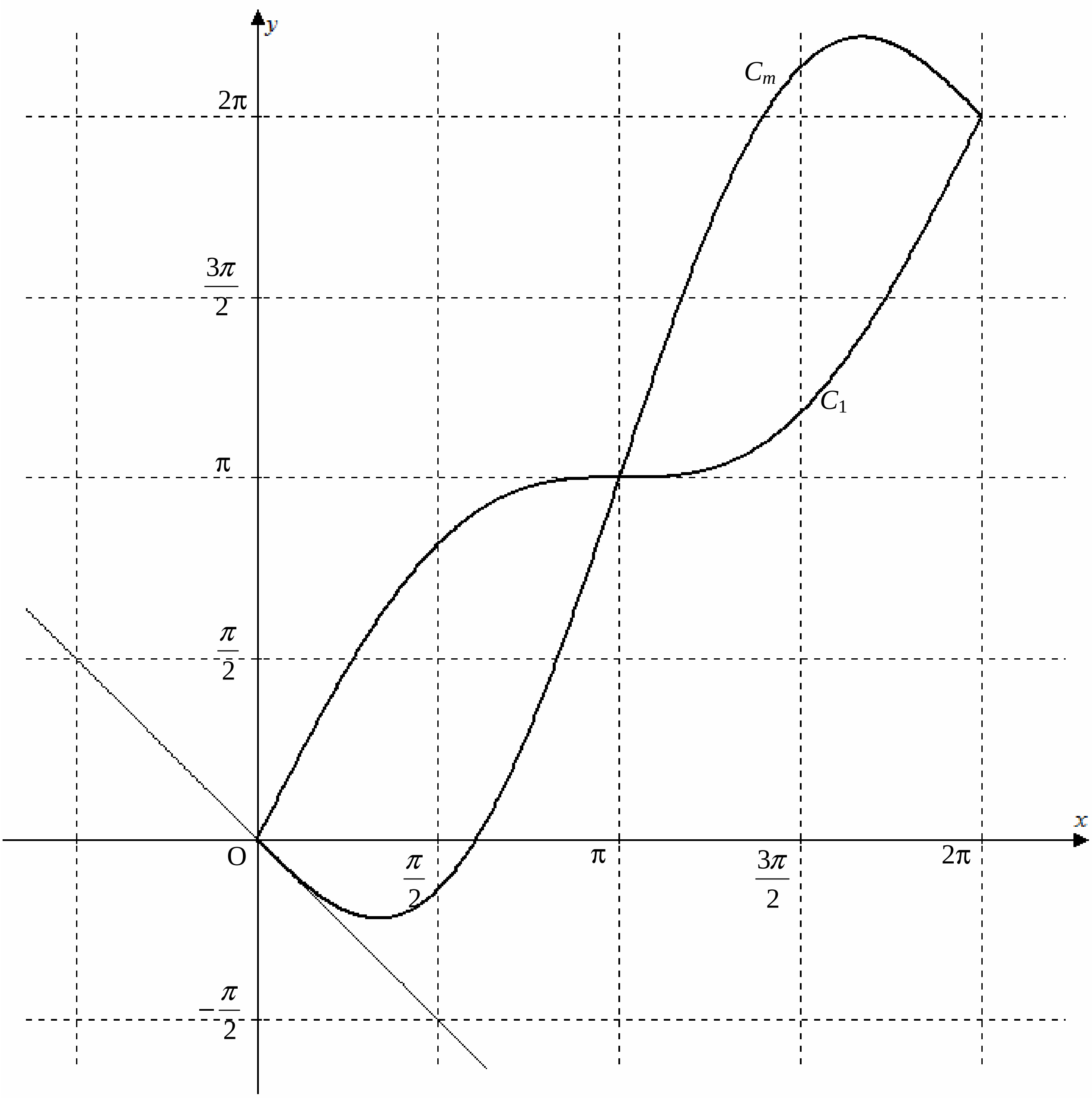
2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \text{ mod}(7)$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \text{ mod}(7)$.
b. On appelle *ordre* de a mod(7), et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \text{ mod}(7)$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \text{ mod}(7)$.
En déduire que k divise 6.
Quelles sont les valeurs possibles de k ?
c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. À tout entier naturel n, on associe le nombre
$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$
Montrer que $A_{2014} \equiv 6 \text{ mod}(7)$.

Annexe

Exercice 2



__Annexe à rendre avec la copie__

Exercice 4

Candidats __ne suivant pas__ l'enseignement de spécialité mathématiques.