

Devoir de Synthèse (3h)
Mathématiques
 (Calculatrice autorisée)

Exercice I (10 points)**Partie A**

Soit g la fonction définie sur \mathbf{R} par : $g(x) = x^3 + 3x + 4$.

1°) Etudier les variations de g sur \mathbf{R} . Tracer son tableau de variations.

2°) Calculer $g(-1)$, en déduire le signe de g sur \mathbf{R} .

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par : $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1}$.

On note (C_f) sa courbe représentatif dans un repère orthonormé.

1°) Démontrer que l'on peut écrire : $f'(x) = \frac{x g(x)}{(x^2 + 1)^2}$.

2°) En déduire les variations de f sur \mathbf{R} . Tracer son tableau de variations.

3°) Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tous réels x : $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 + 1}$.

4°) Déterminer la position relative de (C_f) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x + 2$.

5°) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

6°) Tracer la courbe (C_f) ainsi que les droites (Δ) et (T) .

Exercice II (4 points)

1°) Soit (E) l'équation : $4 \sin^2(x) + \cos(2x) + \cos(x) = 0$.

- a) Exprimer l'équation (E) en fonction de $\cos(x)$ uniquement.
- b) En déduire la résolution de (E) dans \mathbf{R} .

2°) On note, pour tout réel x : $A(x) = \cos(x) - \sqrt{3} \sin(x)$.

- a) Démontre que, pour tout réel x : $A(x) = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
- b) En déduire la résolution de $A(x) = \sqrt{2}$ dans \mathbf{R} puis dans $]-\pi ; \pi]$.

Exercice III (5 points)

Dans un lycée, on étudie les moyennes du 1^{er} trimestre de deux classes appelées respectivement SA et SB.

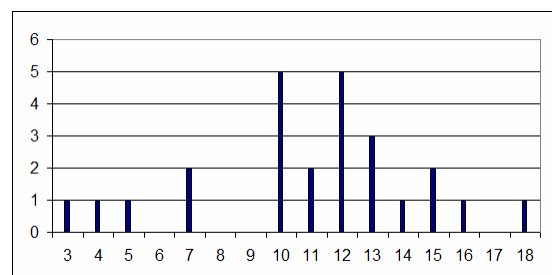
Partie A

Sur le diagramme en bâtons ci-contre, on a reporté les moyennes trimestrielles obtenues par les 25 élèves de la classe SA au 1^{er} trimestre :

1°) Déterminer la médiane M , le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de cette série statistique.

2°) Représenter le diagramme en boîte correspondant de la classe SA.

3°) Calculer la moyenne et l'écart-type de la classe SA.



Partie B

Les indicateurs de la classe SB permettant de résumer la série statistique des moyennes du 1^{er} trimestre sont les suivants : Min = 3 ; premier quartile $Q_1' = 8$; Médiane $M' = 10$; troisième quartile $Q_3' = 12$; Max = 17.

1°) Représenter le diagramme en boîte correspondant de la classe SB en-dessous de celui de la classe SA.

2°) Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ou fausses ? (Justifier les réponses)

- Au moins 50% des élèves de la classe SB ont une note comprise entre 10 et 12.
- Au moins 75% des élèves de la classe SB ont une note inférieure ou égale à 12.
- Au moins 50% des élèves de la classe SB ont une note inférieure ou égale à la note médiane de la série de la classe SA.

Exercice IV (7 points)

On considère deux points O et A tels que $OA = 4$.

On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice.

1°) Déterminer le point H de la droite (OA) qui vérifie $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AH} = 8$.

2°) Que signifie pour les points H et M l'égalité : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM}$?

3°) En déduire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} = 8$.

4°) On considère un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\vec{i} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OA}$.

- Retrouver analytiquement le résultat de la question 3.
- Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre [OA].
- Démontrer que l'ensemble (C) des points du plan d'équation $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection entre le cercle de diamètre [OA] et le cercle (C).

Exercice V (4 points)

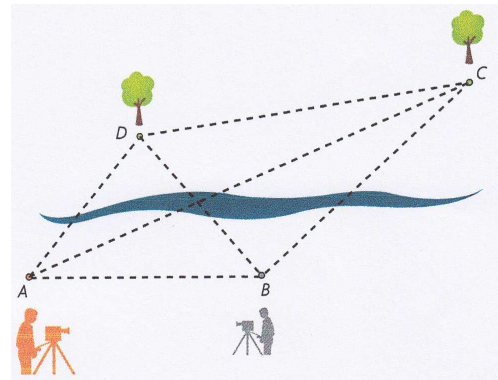
Un observateur (placé en A) cherche à mesurer la distance entre deux arbres (dont les emplacements sont marqués par les points C et D) situés de l'autre côté d'une rivière infranchissable.

Son assistant se place au point B de telle manière que la distance AB soit égale à 100 mètres.

L'observateur mesure les angles \widehat{BAC} et \widehat{DAC} : il trouve respectivement 52° et 29° .

Son assistant mesure les angles \widehat{ABD} et \widehat{DBC} : il trouve respectivement 40° et 43° .

Grâce à ces données, déterminer la distance CD.



Remarque : Le barème indiqué est sur 30.