Chap 11. Combinatoire et dénombrement

Livre p 25 – Chap 1. Combinatoire et dénombrement

1. *p*-uplets

a. Produit cartésien

Avec deux ensembles : A×B, ensemble des couples (a, b). Cas particulier : A×A = A^2.
Avec trois ensembles : A×B×C, ensemble des triplets (a, b, c). Cas particulier : A×A×A = A^3.
Généralisation à p ensembles : $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$, ensemble des p-uplets (a_1, a_2, …, a_p).
Cas particulier : A×A×…×A = A^p.

b. Propriété

Avec le produit cartésien : Card(A×B) = Card(A) × Card(B) et donc : Card(A^2) = $[\text{Card}(A)]^2$
Plus généralement : Card($A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_p$) = Card($A_1$) × Card($A_2$) × … × Card($A_p$)
et Card(A^p) = $[\text{Card}(A)]^p$.

2. Arrangements et permutations

a. Factorielle

Définition : 0 ! = 1 et pour tout entier naturel n non nul : n ! = 1 × 2 × … × n = $\prod_{k=1}^{n} k$
Propriété : (n + 1) ! = (n + 1) × n !
Utilisation de la calculatrice : <math>   PROB   4 : !

b. Arrangement de *p* éléments d'un ensemble à *n* éléments

Soit $p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments d'un ensemble E, tout p-uplet d'éléments distincts de E.
Remarque : Les éléments sont tous différents et l'ordre est important.

Si p = 2, on a des couples (x_1 ; x_2) avec $x_1 \neq x_2$
Si p = 3, on a des triplets (x_1 ; x_2 ; x_3) avec $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$, $x_2 \neq x_3$.

c. Propriété

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments est généralement noté A_n^p et vaut : $A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1)) = \frac{n!}{(n-p)!}$
Utilisation de la calculatrice : <math>   PROB   2 : Arrangement   (se note alors : ${}_n\mathrm{A}_p$)
Exemple d'utilisation : Tiercé.

d. Permutation des éléments d'un ensemble

Une permutation des éléments d'un ensemble E est un arrangement de tous les éléments de l'ensemble.
Propriété : Dans un ensemble à n élément, il y a n ! permutations possibles.
Exemple d'utilisation : Anagrammes d'un mot dont toutes les lettres sont différentes.

3. Combinaisons

a. Combinaison à *p* éléments d'un ensemble à *n* éléments

Soit $p \leq n$. On appelle partie (ou combinaison) à *p* éléments d'un ensemble E, tout sous-ensemble à *p* éléments de E.

Remarque : Les élément d'un ensemble sont tous différents et ne sont pas ordonnés.

b. Propriété

Le nombre de combinaisons de *p* éléments d'un ensemble E à *n* éléments est noté $\binom{n}{p}$ et appelé coefficient binomial, il se lit : « *p* parmi *n* » (anciennement noté C_n^p) et vaut :

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(p-1))}{p \times (p-1) \times \ldots \times 1} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exemple d'utilisation : Loto.

c. Propriété de symétrie

Soit $p \leq n$. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

d. Relation et triangle de Pascal

Relation de Pascal : Soit $p < n$. $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Triangle de Pascal :

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

e. Nombre de parties d'un ensemble à *n* éléments

Si Card E = *n*, alors : Card $\mathscr{P}$(E) = 2^n, c'est-à-dire que : $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

f. Binôme de Newton (Programme de Maths expertes)

$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$ (exercice n°122 p 49)